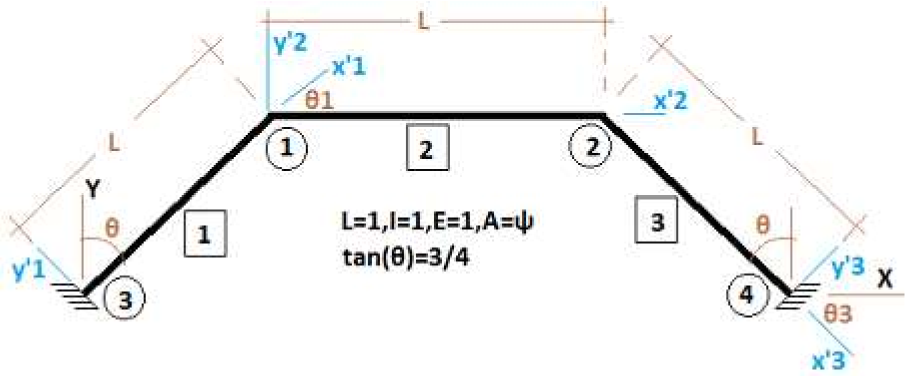
Desarrollo matricial del ejemplo 9-1 de García, L. E., Dinámica Estructural Aplicada al Diseño Sísmico, 1998



[CaseMode:=Sensitive,InputMode:=Word,DisplayFormat:=Compressed]

$$\left[L := 1,\ I := 1,\ E := 1,\ A := \psi,\ \theta := \mathrm{ATAN}\left(\frac{3}{4}\right),\ \theta 1 := \mathrm{ATAN}\left(\frac{4}{3}\right),\ \theta 2 := 0,\ \theta 3 := \mathrm{ATAN}\left(\frac{4}{3}\right)\right]$$

Matriz de rigidez local en coordenadas locales, igual en los tres elementos:

$$k := \begin{bmatrix} \frac{A\cdot E}{L} & 0 & 0 & -\frac{A\cdot E}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\cdot E\cdot I}{L^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} & 0 & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L} & 0 & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L} \\ -\frac{A\cdot E}{L} & 0 & 0 & \frac{A\cdot E}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12\cdot E\cdot I}{L^3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} & 0 & \frac{12\cdot E\cdot I}{L^3} & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L} & 0 & -\frac{6\cdot E\cdot I}{L^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L} \end{bmatrix}$$

$$k := \begin{bmatrix} \psi & 0 & 0 & -\psi & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & -6 & 2 \\ -\psi & 0 & 0 & \psi & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación general de coordenadas locales a coordenadas globales:

To=COS[(x x') (x y')|
        (y x') (y y')|]
v=To*v'

Matrices de transformación 2D básicas:

$$To2D := COS \begin{bmatrix} θx\_xp & θx\_yp \\ θy\_xp & θy\_yp \end{bmatrix}$$

$$To2D1 := SUBST\left(COS \begin{bmatrix} θx\_xp & θx\_yp \\ θy\_xp & θy\_yp \end{bmatrix}, [θx\_xp, θx\_yp, θy\_xp, θy\_yp], \left[θ1, \frac{\pi}{2} + θ1, \frac{\pi}{2} - θ1, θ1\right]\right)$$

$$To2D1 := \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$$

To2D2 := IDENTITY_MATRIX(2)

$$To2D2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$To2D3 := SUBST\left(COS \begin{bmatrix} θx\_xp & θx\_yp \\ θy\_xp & θy\_yp \end{bmatrix}, [θx\_xp, θx\_yp, θy\_xp, θy\_yp], \left[θ3, \frac{\pi}{2} - θ3, \frac{\pi}{2} + θ3, θ3\right]\right)$$

$$To2D3 := \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$To3 := T3_{[1, 2]} \downarrow\downarrow [1, 2]$$

$$To3 := \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$To := COS\begin{bmatrix} θx\_xp & θx\_yp & \frac{π}{2} \\ θy\_xp & θy\_yp & \frac{π}{2} \\ \frac{π}{2} & \frac{π}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$Oo := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} To & Oo \\ Oo & To \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} COS(θx\_xp) & COS(θx\_yp) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ COS(θy\_xp) & COS(θy\_yp) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & COS(θx\_xp) & COS(θx\_yp) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & COS(θy\_xp) & COS(θy\_yp) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices de transformación de cada elemento:

$$T1 := \begin{bmatrix} COS(θ1) & COS\left(\frac{π}{2} + θ1\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ COS(θ) & COS(θ1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & COS(θ1) & COS\left(\frac{π}{2} + θ1\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & COS(θ) & COS(θ1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T1 := \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T2 := \begin{bmatrix} COS(θ2) & COS\left(\frac{π}{2}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ COS\left(\frac{π}{2}\right) & COS(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & COS(θ2) & COS\left(\frac{π}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & COS\left(\frac{π}{2}\right) & COS(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T3 := SUBST\left(\begin{bmatrix} COS(θx\_xp) & COS(θx\_yp) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ COS(θy\_xp) & COS(θy\_yp) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & COS(θx\_xp) & COS(θx\_yp) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & COS(θy\_xp) & COS(θy\_yp) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [θx\_xp, θx\_yp, θy\_xp,\right.$$

$$\theta y\_yp], \left[\theta 3, \frac{\pi}{2} - \theta 3, \frac{\pi}{2} + \theta 3, \theta 3\right]\Bigg)$$

$$T3 := \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

k1 := T1·k·T1`

$$k1 := \frac{1}{25}\cdot\begin{bmatrix} 9\cdot\psi + 192 & 12\cdot\psi - 144 & -120 & -9\cdot\psi - 192 & 144 - 12\cdot\psi & -120 \\ 12\cdot\psi - 144 & 16\cdot\psi + 108 & 90 & 144 - 12\cdot\psi & -16\cdot\psi - 108 & 90 \\ -120 & 90 & 100 & 120 & -90 & 50 \\ -9\cdot\psi - 192 & 144 - 12\cdot\psi & 120 & 9\cdot\psi + 192 & 12\cdot\psi - 144 & 120 \\ 144 - 12\cdot\psi & -16\cdot\psi - 108 & -90 & 12\cdot\psi - 144 & 16\cdot\psi + 108 & -90 \\ -120 & 90 & 50 & 120 & -90 & 100 \end{bmatrix}$$

k1 eliminando los gdl restringidos:

$$k1_{[4, 5, 6]} \downarrow\downarrow [4, 5, 6]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{9\cdot\psi}{25} + \frac{192}{25} & -\frac{12}{25}\cdot(12 - \psi) & \frac{24}{5} \\ -\frac{12}{25}\cdot(12 - \psi) & \frac{16\cdot\psi}{25} + \frac{108}{25} & -\frac{18}{5} \\ \frac{24}{5} & -\frac{18}{5} & 4 \end{bmatrix}$$

k2 := T2·k·T2`

$$k2 := \begin{bmatrix} \psi & 0 & 0 & -\psi & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & -6 & 2 \\ -\psi & 0 & 0 & \psi & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

k3 ≔ T3·k·T3`

$$k3 := \begin{bmatrix} \frac{9\cdot\psi}{25} + \frac{192}{25} & \frac{144}{25} - \frac{12\cdot\psi}{25} & \frac{24}{5} & -\frac{9\cdot\psi}{25} - \frac{192}{25} & \frac{12\cdot\psi}{25} - \frac{144}{25} & \frac{24}{5} \\ \frac{144}{25} - \frac{12\cdot\psi}{25} & \frac{16\cdot\psi}{25} + \frac{108}{25} & \frac{18}{5} & \frac{12\cdot\psi}{25} - \frac{144}{25} & -\frac{16\cdot\psi}{25} - \frac{108}{25} & \frac{18}{5} \\ \frac{24}{5} & \frac{18}{5} & 4 & -\frac{24}{5} & -\frac{18}{5} & 2 \\ -\frac{9\cdot\psi}{25} - \frac{192}{25} & \frac{12\cdot\psi}{25} - \frac{144}{25} & -\frac{24}{5} & \frac{9\cdot\psi}{25} + \frac{192}{25} & \frac{144}{25} - \frac{12\cdot\psi}{25} & -\frac{24}{5} \\ \frac{12\cdot\psi}{25} - \frac{144}{25} & -\frac{16\cdot\psi}{25} - \frac{108}{25} & -\frac{18}{5} & \frac{144}{25} - \frac{12\cdot\psi}{25} & \frac{16\cdot\psi}{25} + \frac{108}{25} & -\frac{18}{5} \\ \frac{24}{5} & \frac{18}{5} & 2 & -\frac{24}{5} & -\frac{18}{5} & 4 \end{bmatrix}$$

k3 eliminando los gdl restringidos:

$$k3_{[1,\ 2,\ 3]}{}^{\downarrow\downarrow[1,\ 2,\ 3]}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{9\cdot\psi}{25} + \frac{192}{25} & \frac{12}{25}\cdot(12 - \psi) & \frac{24}{5} \\ \frac{12}{25}\cdot(12 - \psi) & \frac{16\cdot\psi}{25} + \frac{108}{25} & \frac{18}{5} \\ \frac{24}{5} & \frac{18}{5} & 4 \end{bmatrix}$$

Ensamblaje de la matriz de rigidez global:

Se agrandan inicialmente cada matriz local en coordenadas globales y se ubican sus respectivos elementos

$$k1g := \begin{bmatrix} k1_{4,4} & k1_{4,5} & k1_{4,6} & 0 & 0 & 0 & k1_{4,1} & k1_{4,2} & k1_{4,3} & 0 & 0 & 0 \\ k1_{5,4} & k1_{5,5} & k1_{5,6} & 0 & 0 & 0 & k1_{5,1} & k1_{5,2} & k1_{5,3} & 0 & 0 & 0 \\ k1_{6,4} & k1_{6,5} & k1_{6,6} & 0 & 0 & 0 & k1_{6,1} & k1_{6,2} & k1_{6,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k1_{1,4} & k1_{1,5} & k1_{1,6} & 0 & 0 & 0 & k1_{1,1} & k1_{1,2} & k1_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ k1_{2,4} & k1_{2,5} & k1_{2,6} & 0 & 0 & 0 & k1_{2,1} & k1_{2,2} & k1_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ k1_{3,4} & k1_{3,5} & k1_{3,6} & 0 & 0 & 0 & k1_{3,1} & k1_{3,2} & k1_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$
k2g := \begin{bmatrix}
k2_{1,1} & k2_{1,2} & k2_{1,3} & k2_{1,4} & k2_{1,5} & k2_{1,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
k2_{2,1} & k2_{2,2} & k2_{2,3} & k2_{2,4} & k2_{2,5} & k2_{2,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
k2_{3,1} & k2_{3,2} & k2_{3,3} & k2_{3,4} & k2_{3,5} & k2_{3,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
k2_{4,1} & k2_{4,2} & k2_{4,3} & k2_{4,4} & k2_{4,5} & k2_{4,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
k2_{5,1} & k2_{5,2} & k2_{5,3} & k2_{5,4} & k2_{5,5} & k2_{5,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
k2_{6,1} & k2_{6,2} & k2_{6,3} & k2_{6,4} & k2_{6,5} & k2_{6,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$k3g := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k3_{1,1} & k3_{1,2} & k3_{1,3} & 0 & 0 & 0 & k3_{1,4} & k3_{1,5} & k3_{1,6} \\ 0 & 0 & 0 & k3_{2,1} & k3_{2,2} & k3_{2,3} & 0 & 0 & 0 & k3_{2,4} & k3_{2,5} & k3_{2,6} \\ 0 & 0 & 0 & k3_{3,1} & k3_{3,2} & k3_{3,3} & 0 & 0 & 0 & k3_{3,4} & k3_{3,5} & k3_{3,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k3_{4,1} & k3_{4,2} & k3_{4,3} & 0 & 0 & 0 & k3_{4,4} & k3_{4,5} & k3_{4,6} \\ 0 & 0 & 0 & k3_{5,1} & k3_{5,2} & k3_{5,3} & 0 & 0 & 0 & k3_{5,4} & k3_{5,5} & k3_{5,6} \\ 0 & 0 & 0 & k3_{6,1} & k3_{6,2} & k3_{6,3} & 0 & 0 & 0 & k3_{6,4} & k3_{6,5} & k3_{6,6} \end{bmatrix}$$

Se suman las matrices agrandadas factorizando el 1/25:

$$K := \frac{1}{25} \cdot (25 \cdot (k1g + k2g + k3g))$$

$$K := \frac{1}{25}\cdot\begin{bmatrix}
34\cdot\psi + 192 & 12\cdot\psi - 144 & 120 & -25\cdot\psi & 0 & 0 & -9\cdot\psi - 192 & 144 - 12\cdot\psi & 120 & 0 & 0 & 0 \\
12\cdot\psi - 144 & 16\cdot\psi + 408 & 60 & 0 & -300 & 150 & 144 - 12\cdot\psi & -16\cdot\psi - 108 & -90 & 0 & 0 & 0 \\
120 & 60 & 200 & 0 & -150 & 50 & -120 & 90 & 50 & 0 & 0 & 0 \\
-25\cdot\psi & 0 & 0 & 34\cdot\psi + 192 & 144 - 12\cdot\psi & 120 & 0 & 0 & 0 & -9\cdot\psi - 192 & 12\cdot\psi - 144 & 120 \\
0 & -300 & -150 & 144 - 12\cdot\psi & 16\cdot\psi + 408 & -60 & 0 & 0 & 0 & 12\cdot\psi - 144 & -16\cdot\psi - 108 & 90 \\
0 & 150 & 50 & 120 & -60 & 200 & 0 & 0 & 0 & -120 & -90 & 50 \\
-9\cdot\psi - 192 & 144 - 12\cdot\psi & -120 & 0 & 0 & 0 & 9\cdot\psi + 192 & 12\cdot\psi - 144 & -120 & 0 & 0 & 0 \\
144 - 12\cdot\psi & -16\cdot\psi - 108 & 90 & 0 & 0 & 0 & 12\cdot\psi - 144 & 16\cdot\psi + 108 & -120 & 0 & 0 & 0 \\
120 & -90 & 50 & 0 & 0 & 0 & -120 & 90 & 100 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -9\cdot\psi - 192 & 12\cdot\psi - 144 & -120 & 0 & 0 & 0 & 9\cdot\psi + 192 & 144 - 12\cdot\psi & -120 \\
0 & 0 & 0 & 12\cdot\psi - 144 & -16\cdot\psi - 108 & -90 & 0 & 0 & 0 & 144 - 12\cdot\psi & 16\cdot\psi + 108 & -90 \\
0 & 0 & 0 & 120 & 90 & 50 & 0 & 0 & 0 & -120 & -90 & 100
\end{bmatrix}$$

Aplicación de las restricciones

Se eliminan las filas y columnas de los grados de libertad restringidos y se factoriza 1/25:

$$Kr := K_{[1, 2, 3, 4, 5, 6]}\ {}^{\downarrow\downarrow[1, 2, 3, 4, 5, 6]}$$

$$Kr := \frac{1}{25}\cdot\begin{bmatrix} 34\cdot\psi + 192 & 12\cdot\psi - 144 & 120 & -25\cdot\psi & 0 & 0 \\ 12\cdot\psi - 144 & 16\cdot\psi + 408 & 60 & 0 & -300 & 150 \\ 120 & 60 & 200 & 0 & -150 & 50 \\ -25\cdot\psi & 0 & 0 & 34\cdot\psi + 192 & 144 - 12\cdot\psi & 120 \\ 0 & -300 & -150 & 144 - 12\cdot\psi & 16\cdot\psi + 408 & -60 \\ 0 & 150 & 50 & 120 & -60 & 200 \end{bmatrix}$$

A continuación se adopta que no habrá deformación axial de los elementos, es decir, los elementos son infinitamente rígidos

Deformaciones de los nudos basados en una rigidez infinita, osea ux'=0;

Desplazamiento del nudo 1 por deformación del elemento 1:

$$\begin{bmatrix} ux1 \\ uy1 \end{bmatrix} = To2D1\cdot\begin{bmatrix} uxp1 \\ uyp1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ux1 \\ uy1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} uxp1 \\ uyp1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ux1 \\ uy1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6\cdot uxp1 - 0.8\cdot uyp1 \\ 0.8\cdot uxp1 + 0.6\cdot uyp1 \end{bmatrix}$$

ux'1=0:

$$\begin{bmatrix} ux1 \\ uy1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6\cdot 0 - 0.8\cdot uyp1 \\ 0.8\cdot 0 + 0.6\cdot uyp1 \end{bmatrix}$$

$$uyp1 = -\frac{5\cdot ux1}{4} \wedge uyp1 = \frac{5\cdot uy1}{3}$$

$$-\frac{5\cdot ux1}{4} = \frac{5\cdot uy1}{3}$$

$$3\cdot ux1 + 4\cdot uy1 = 0$$

Deformación del elemento 2 basado en que los desplazamiento axiales son iguales en los nudos:

$$\begin{bmatrix} ux1 \\ uy1 \end{bmatrix} = To2D2\cdot\begin{bmatrix} uxp1 \\ uyp1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ux1 \\ uy1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uxp1 \\ uyp1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ux2 \\ uy2 \end{bmatrix} = To2D2 \cdot \begin{bmatrix} uxp2 \\ uyp2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ux2 \\ uy2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uxp2 \\ uyp2 \end{bmatrix}$$

uxp1 = uxp2 = uxp

$$\begin{bmatrix} ux1 \\ uy1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uxp \\ uyp1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ux2 \\ uy2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uxp \\ uyp2 \end{bmatrix}$$

$$ux1 = uxp \wedge uy1 = uyp1$$

$$ux2 = uxp \wedge uy2 = uyp2$$

$$ux1 - ux2 = 0$$

Desplazamiento del nudo 2 por deformación del elemento 3:

$$\begin{bmatrix} ux2 \\ uy2 \end{bmatrix} = To2D3 \cdot \begin{bmatrix} uxp2 \\ uyp2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ux2 \\ uy2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} uxp2 \\ uyp2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ux2 \\ uy2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \cdot uxp2 + 0.8 \cdot uyp2 \\ 0.6 \cdot uyp2 - 0.8 \cdot uxp2 \end{bmatrix}$$

ux'2=0:

$$\begin{bmatrix} ux2 \\ uy2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \cdot 0 + 0.8 \cdot uyp2 \\ 0.6 \cdot uyp2 - 0.8 \cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$uyp2 = \frac{5 \cdot ux2}{4} \wedge uyp2 = \frac{5 \cdot uy2}{3}$$

$$\frac{5 \cdot ux2}{4} = \frac{5 \cdot uy2}{3}$$

$$3 \cdot ux2 - 4 \cdot uy2 = 0$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 3\cdot ux1 + 4\cdot uy1 \\ ux1 - ux2 \\ 3\cdot ux2 - 4\cdot uy2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Usando el mismo vector de deformación:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ux1 \\ uy1 \\ \theta x1 \\ ux2 \\ uy2 \\ \theta x2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se reorganiza teniendo en cuenta que hay 3 variables independientes y 3 dependientes, que pueden separarse como [ux1,θx1,θx2]\` independientes y [uy1,ux2,uy2]\` independientes:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ux1 \\ \theta x1 \\ \theta x2 \\ uy1 \\ ux2 \\ uy2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}\right] \cdot \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} ux1 \\ \theta x1 \\ \theta x2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} uy1 \\ ux2 \\ uy2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[Ai, Ad] \cdot \begin{bmatrix} Ui \\ Ud \end{bmatrix} = [[O]]$$

$$Ai := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ad := \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$U := [[ux1, \theta x1, \theta x2, uy1, ux2, uy2]]'$$

$$Ui := \begin{bmatrix} ux1 \\ \theta x1 \\ \theta x2 \end{bmatrix}$$

$$Ud := \begin{bmatrix} uy1 \\ ux2 \\ uy2 \end{bmatrix}$$

$$O := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Ro := - Ad^{-1} \cdot Ai$$

$$Ro := -\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot Ai$$

$$Ro := \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R inicial, con filas ordenadas conforme [Ui;Ud]=[ux1,θx1,θx2,uy1,ux2,uy2]':

$$Rini := \begin{bmatrix} \text{IDENTITY\_MATRIX(3)} \\ [Ro] \end{bmatrix}$$

$$Rini := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Reordenar R para que tenga el orden de U:

$$R := \left[Rini_1, Rini_4, Rini_2, Rini_5, Rini_6, Rini_3\right]$$

$$R := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

U = R·Ui

$$\begin{bmatrix} ux1 \\ \theta x1 \\ \theta x2 \\ uy1 \\ ux2 \\ uy2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ux1 \\ \theta x1 \\ \theta x2 \end{bmatrix}$$

Ui = R'·U

$$\begin{bmatrix} ux1 \\ \theta x1 \\ \theta x2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ux1 + ux2 - \frac{3 \cdot uy1}{4} + \frac{3 \cdot uy2}{4} \\ \theta x1 \\ \theta x2 \end{bmatrix}$$

Ecuación matricial reducida {fuerzas}=[K]*{deformación}:

F = Kr·U

Contragradiente a las fuerzas de las deformaciones independientes:

Fi = R'·F

Usando la ecuación matricial:

Fi = R'·(Kr·U)

Usando U=R·Ui:

$Fi = R^{\prime} \cdot Kr \cdot (R \cdot Ui)$

Organizando;

$Fi = (R^{\prime} \cdot Kr \cdot R) \cdot Ui$

$Fi = Ki \cdot Ui$

$Ki := R^{\prime} \cdot Kr \cdot R$

$$Ki := \frac{1}{25} \cdot \begin{bmatrix} 1612.5 & -37.5 & -37.5 \\ -37.5 & 200 & 50 \\ -37.5 & 50 & 200 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez para operar los gdl independientes no depende del área, expresada como ψ, tal como se procedió a establecer que los elementos tienen una rigidez axial infinita.