

ESPECIALIZACIÓN EN ESTRUCTURAS ANÁLISIS ESTRUCTURAL AVANZADO

ELEMENTOS UNIDIMENSIONALES ESFUERZO AXIAL PURO

Michel Bolaños Guerrero,

Ing. Civil, Especialista en Estructuras,
Magister en Ingeniería – Énfasis en Ingeniería Civil,
Candidato a Doctor en Ingeniería – Énfasis en Mecánica de Sólidos

2023-B

Facultad de Ingeniería - Especialización en Estructuras

<https://michel.udenar.edu.co/> - michel@udenar.edu.co

Universidad de Nariño



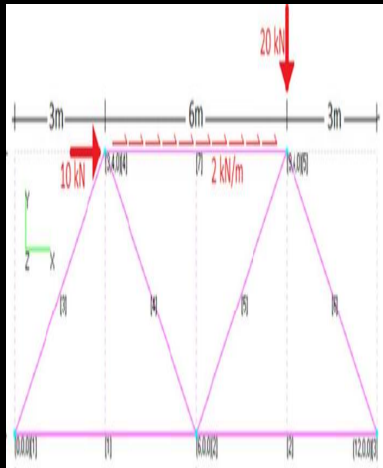
ELEMENTOS UNIDIMENSIONALES

ESFUERZO AXIAL PURO

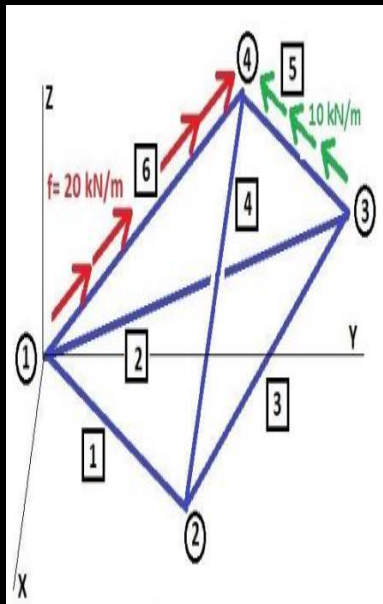
1. Definición.
2. Ecuación matricial local 1D.
3. Ecuaciones matricial local 3D.
4. Rotación.
5. Ensamblaje.



1. ESFUERZO AXIAL PURO

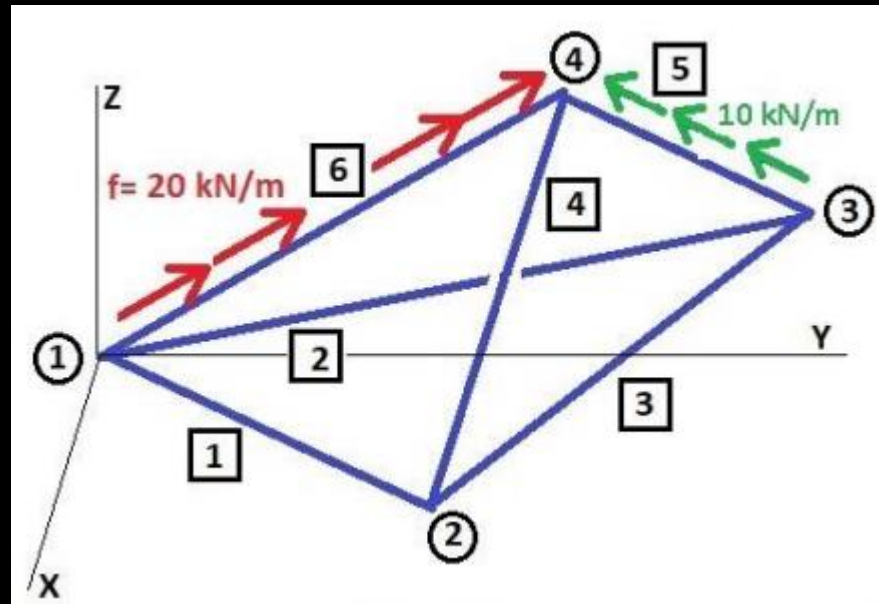
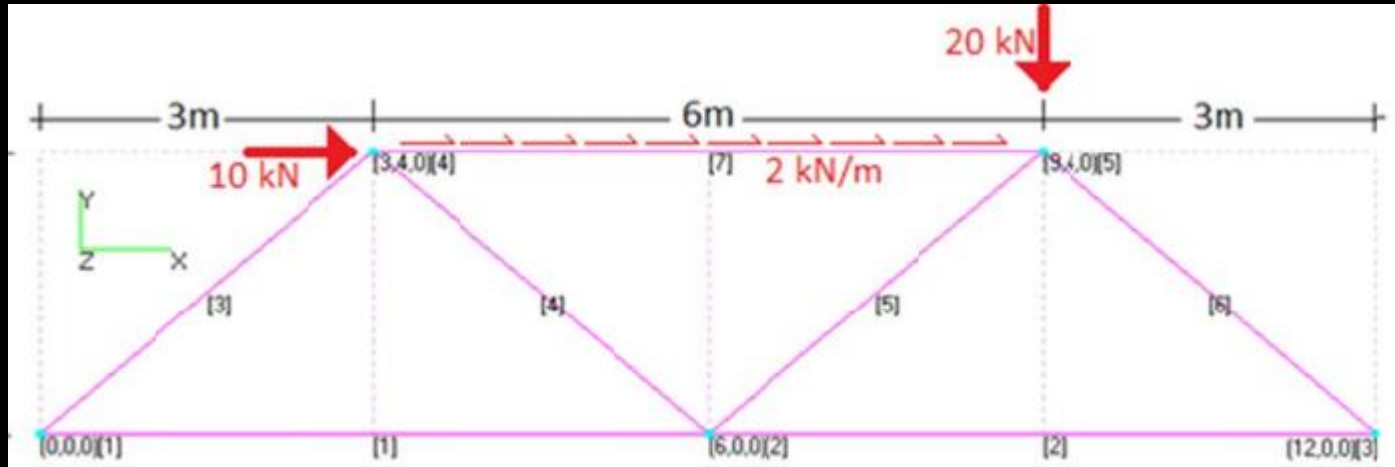


- Conexiones por medio de pasadores sin fricción
- Elementos rectos
- Dentro del campo de pequeñas deformaciones y rango elástico lineal

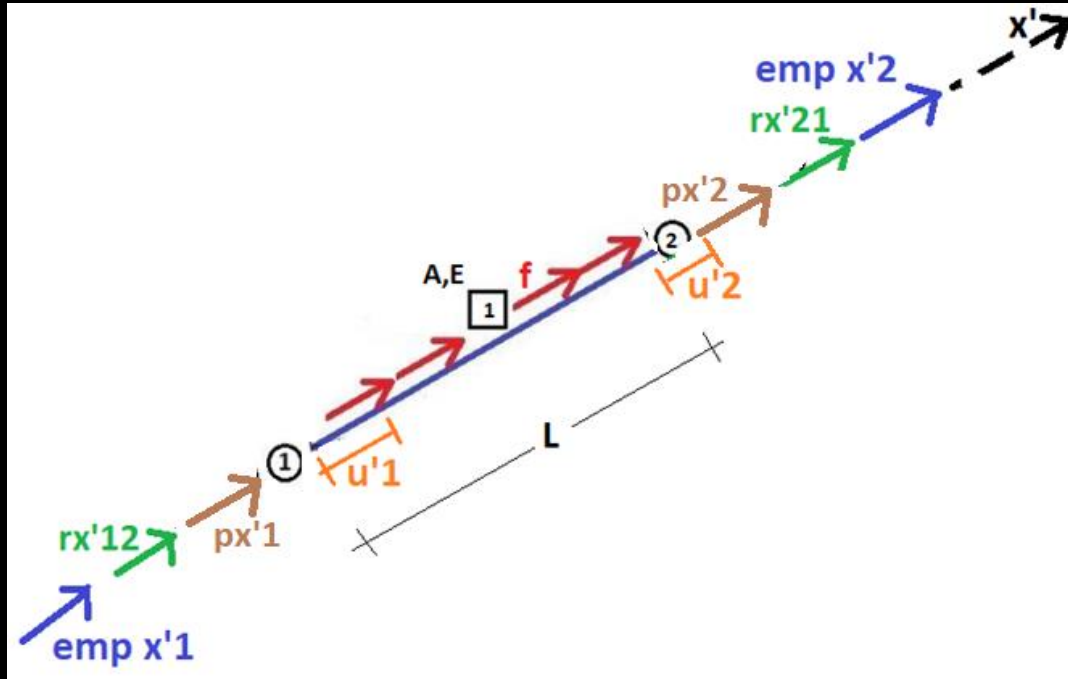


- ~~Cargas, incluidas reacciones, solamente en los nudos~~
- Cargas, incluidas reacciones, puntuales en los nudos y distribuidas axiales dentro de los elementos

1. ESFUERZO AXIAL PURO



1. ESFUERZO AXIAL PURO



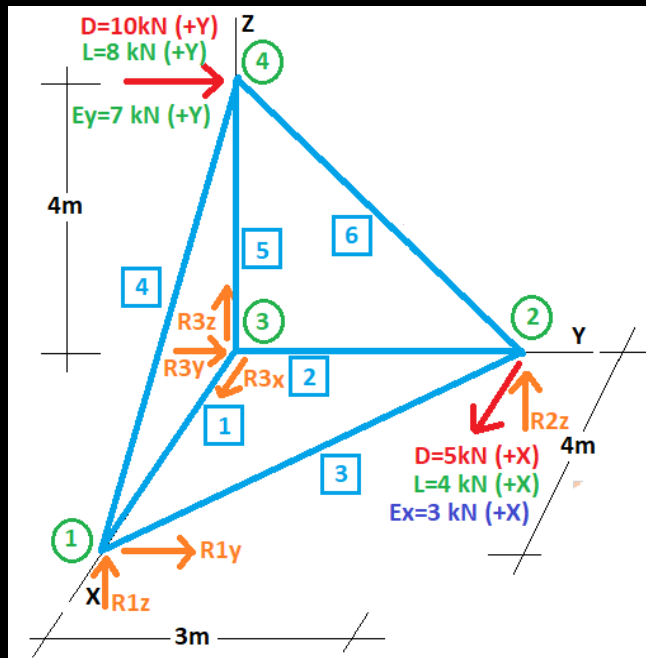
ECUACIÓN MATRICIAL LOCAL 1D EN COORDENADAS LOCALES

$$\{r'\} + \{p'\} = [k']\{d'\} + \{emp'\}$$

$$\begin{Bmatrix} r'_{12} \\ r'_{21} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^{x'} \\ p_2^{x'} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} emp_1^{x'} \\ emp_2^{x'} \end{Bmatrix}$$



1. ESFUERZO AXIAL PURO



[k'] [KN/cm]		{r'} [KN]	
u'1	u'3		D
5	-5	rx'13	-5
-5	5	rx'31	5

{d'} [cm,°]	
	D
u'1	-1
u'3	0

[k']		{r'}	
u'3	u'2		D
7	-7	rx'32	-13.75
-7	7	rx'23	13.75

{d'}	
	D
u'3	0
u'2	2.0625

[k']		{r'}	
u'1	u'2		D
4	-4	rx'12	6.25
-4	4	rx'21	-6.25

{d'}	
	D
u'1	-0.8
u'2	-2.3625

ECUACIÓN MATRICIAL LOCAL 1D EN COORDENADAS LOCALES

$$\{r'\} + \{p'\} = [k']\{d'\} + \{emp'\}$$

$$\begin{Bmatrix} r'_{12} \\ r'_{21} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^{x'} \\ p_2^{x'} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} emp_1^{x'} \\ emp_2^{x'} \end{Bmatrix}$$



1. ESFUERZO AXIAL PURO

ECUACIÓN MATRICIAL LOCAL 3D EN COORDENADAS LOCALES

$$\{r'\} + \{p'\} = [k']\{d'\} + \{emp'\}$$

$$\begin{Bmatrix} r_{12}^{x'} \\ r_{12}^{y'} \\ r_{12}^{z'} \\ r_{21}^{x'} \\ r_{21}^{y'} \\ r_{21}^{z'} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^{x'} \\ p_1^{y'} \\ p_1^{z'} \\ p_2^{x'} \\ p_2^{y'} \\ p_2^{z'} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ w'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \\ w'_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} emp_1^{x'} \\ 0 \\ 0 \\ emp_2^{x'} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



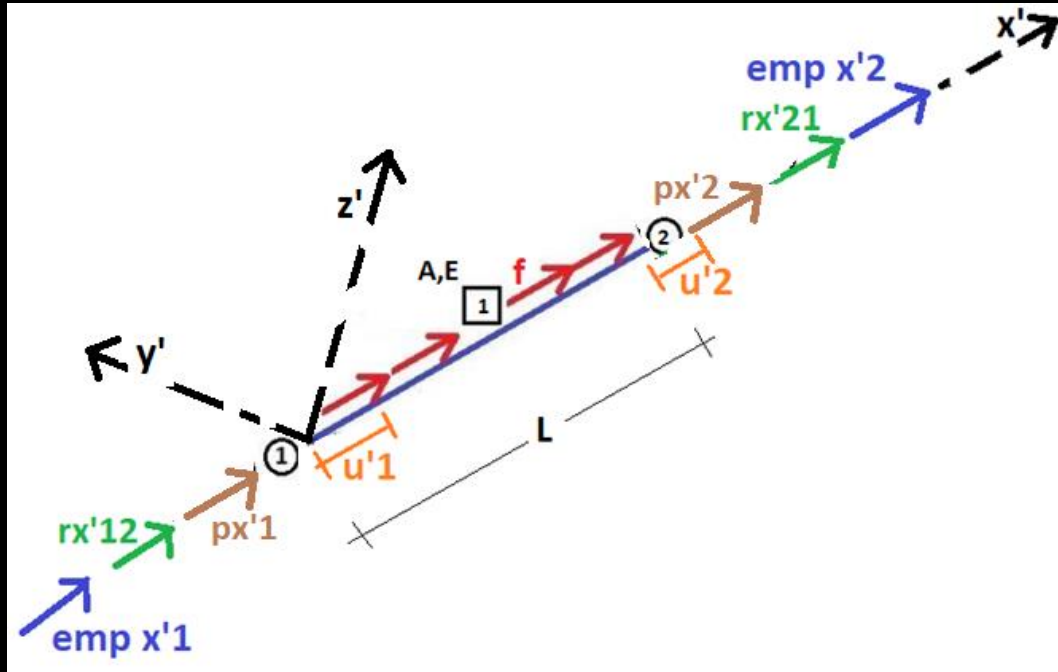
1. ESFUERZO AXIAL PURO



$$\begin{Bmatrix} r_{12}^{x'} \\ r_{12}^{y'} = 0 \\ r_{12}^{z'} = 0 \\ r_{21}^{x'} \\ r_{21}^{y'} = 0 \\ r_{21}^{z'} = 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^{x'} \\ p_1^{y'} \\ p_1^{z'} \\ p_2^{x'} \\ p_2^{y'} \\ p_2^{z'} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ w'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \\ w'_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} emp_1^{x'} \\ 0 \\ 0 \\ emp_2^{x'} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



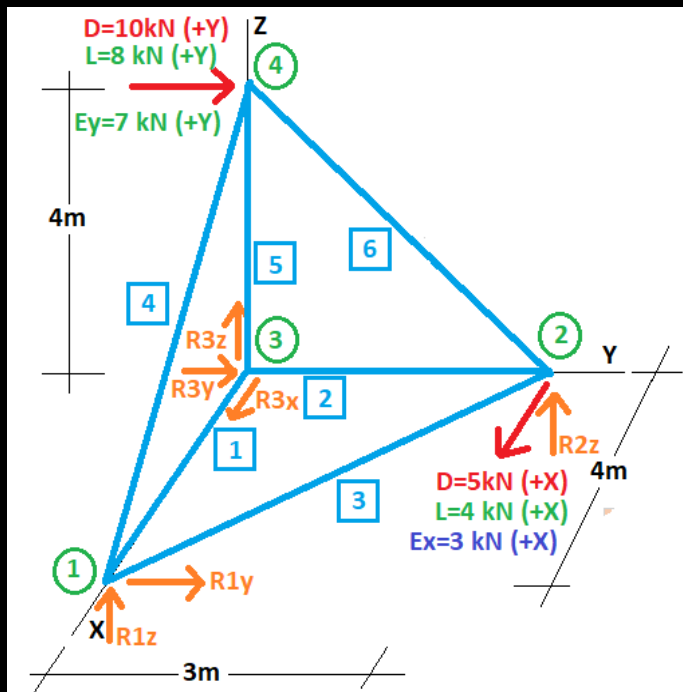
1. ESFUERZO AXIAL PURO



$$\begin{Bmatrix} r_{12}^{x'} \\ r_{12}^{y'} = 0 \\ r_{12}^{z'} = 0 \\ r_{21}^{x'} \\ r_{21}^{y'} = 0 \\ r_{21}^{z'} = 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^{x'} \\ p_1^{y'} \\ p_1^{z'} \\ p_2^{x'} \\ p_2^{y'} \\ p_2^{z'} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ w'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \\ w'_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} emp_1^{x'} \\ 0 \\ 0 \\ emp_2^{x'} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



1. ESFUERZO AXIAL PURO



[k'] [KN/cm]					
u'1	v'1	w'1	u'3	v'3	w'3
5	0	0	-5	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
-5	0	0	5	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

{r'} [KN]	
	D
rx'13	-5
ry'13	0
rz'13	0
rx'31	5
ry'31	0
rz'31	0

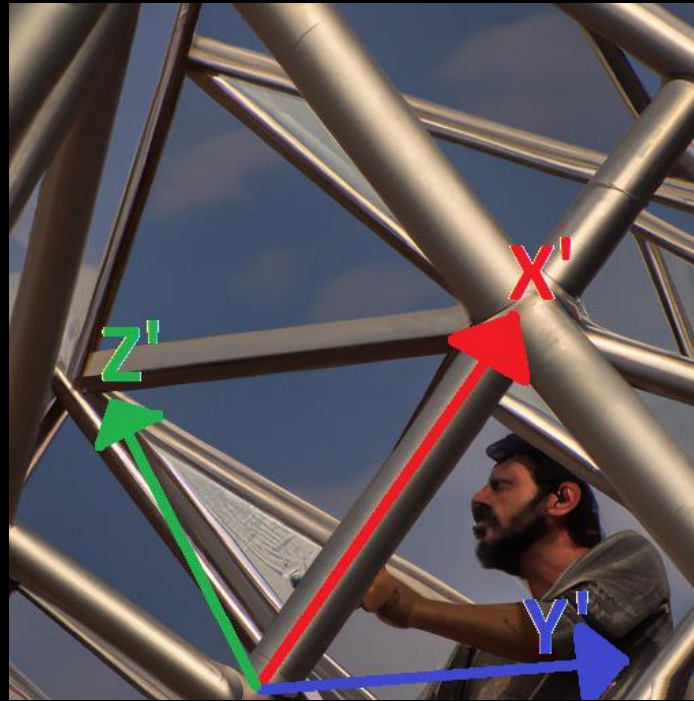
{r'}		{p'}
	D	D
rx'32	-13.75	0
ry'32	0	0
rz'32	0	0
rx'23	13.75	0
ry'23	5	-5
rz'23	0	0

{d'}	
	D
u'3	0
v'3	0
w'3	0
u'2	2.0625
v'2	-4.5
w'2	0

$$\begin{Bmatrix} r_{12}^{x'} \\ r_{12}^{y'} = 0 \\ r_{12}^{z'} = 0 \\ r_{21}^{x'} \\ r_{21}^{y'} = 0 \\ r_{21}^{z'} = 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^{x'} \\ p_1^{y'} \\ p_1^{z'} \\ p_2^{x'} \\ p_2^{y'} \\ p_2^{z'} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ w'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \\ w'_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} emp_1^{x'} \\ 0 \\ 0 \\ emp_2^{x'} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



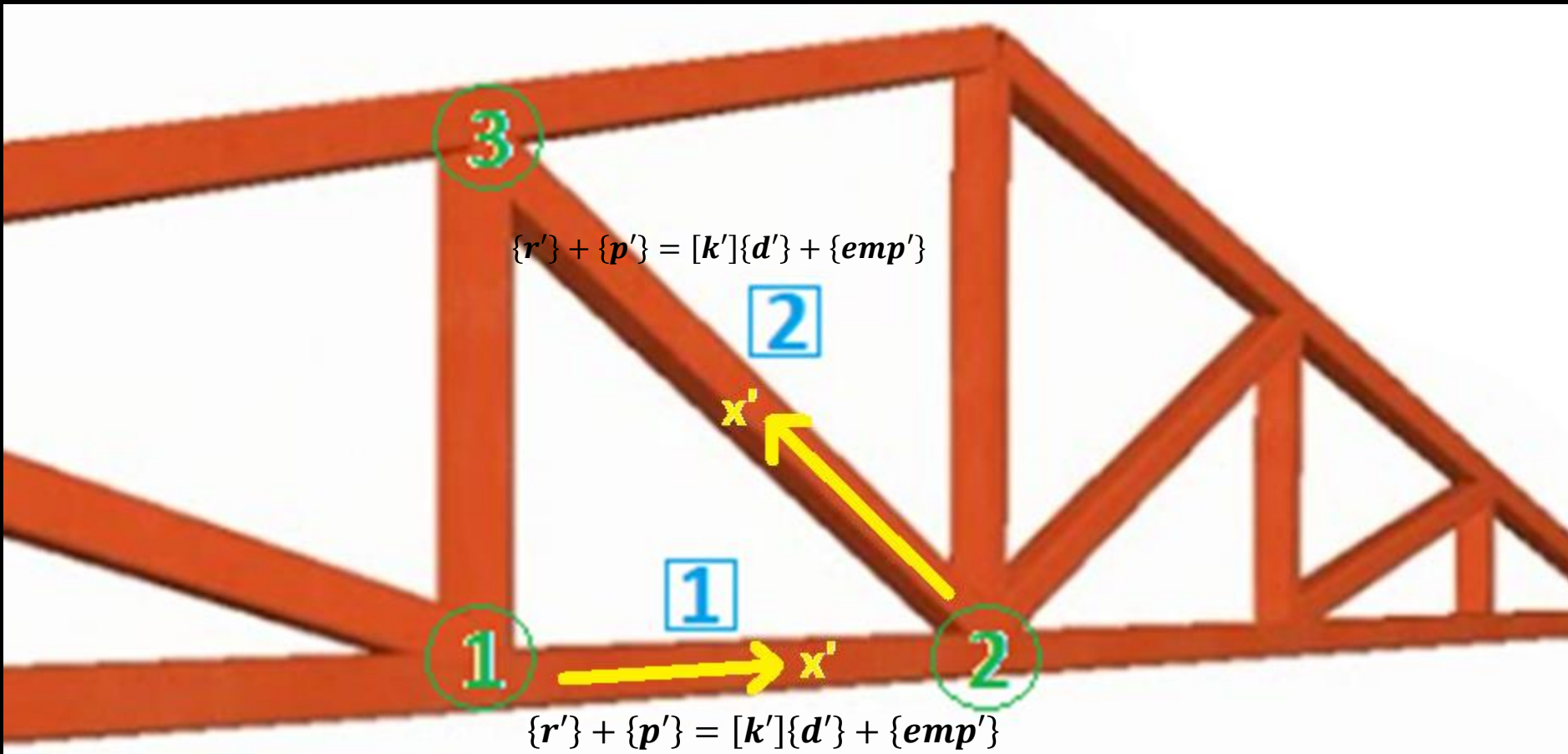
1. ESFUERZO AXIAL PURO



$$\begin{Bmatrix} r_{12}^{x'} \\ r_{12}^{y'} = 0 \\ r_{12}^{z'} = 0 \\ r_{21}^{x'} \\ r_{21}^{y'} = 0 \\ r_{21}^{z'} = 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^{x'} \\ p_1^{y'} \\ p_1^{z'} \\ p_2^{x'} \\ p_2^{y'} \\ p_2^{z'} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ w'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \\ w'_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} emp_1^{x'} \\ 0 \\ 0 \\ emp_2^{x'} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

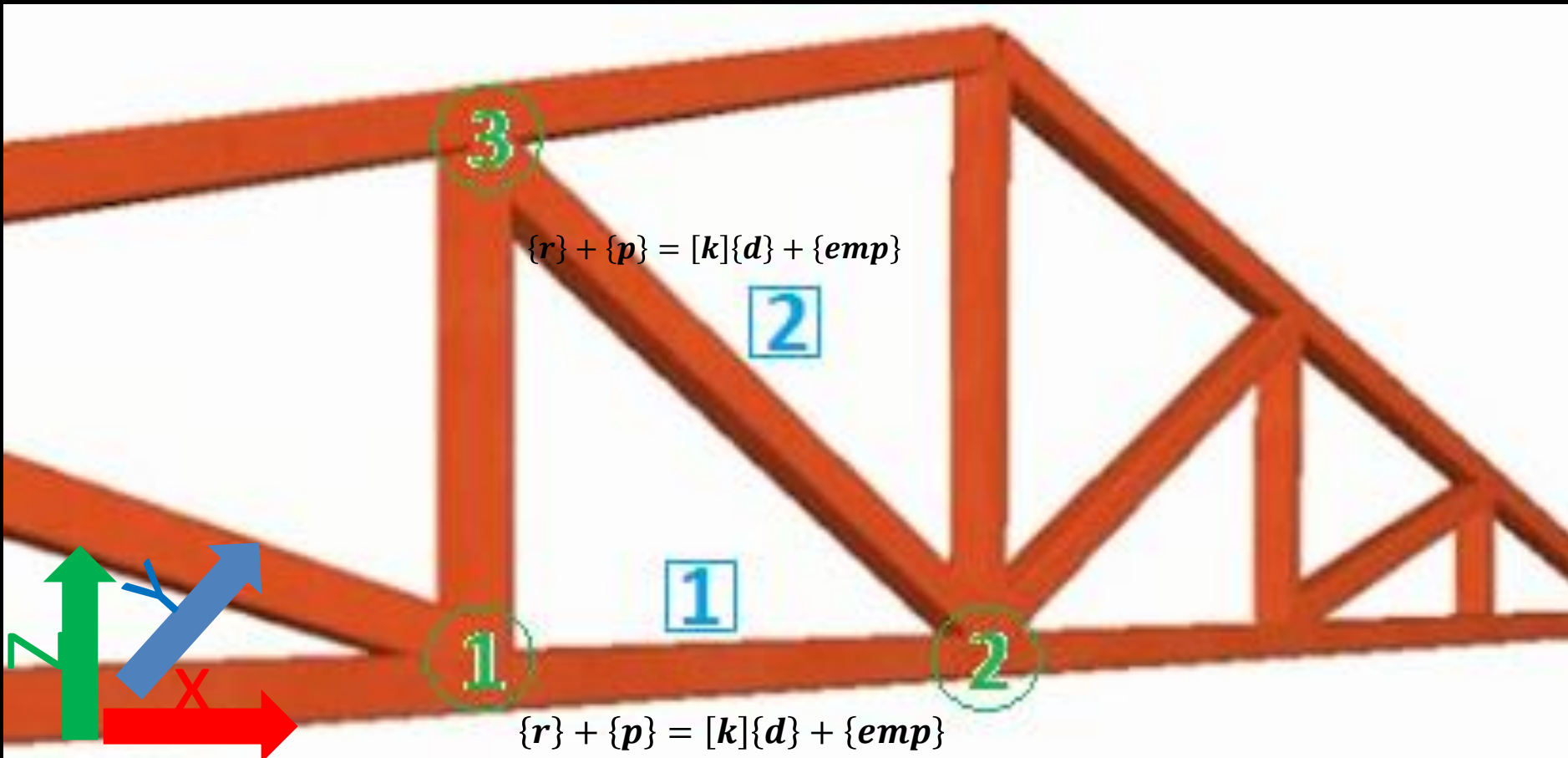
1. ESFUERZO AXIAL PURO

ECUACIONES MATRICIALES LOCALES 3D EN COORDENADAS LOCALES



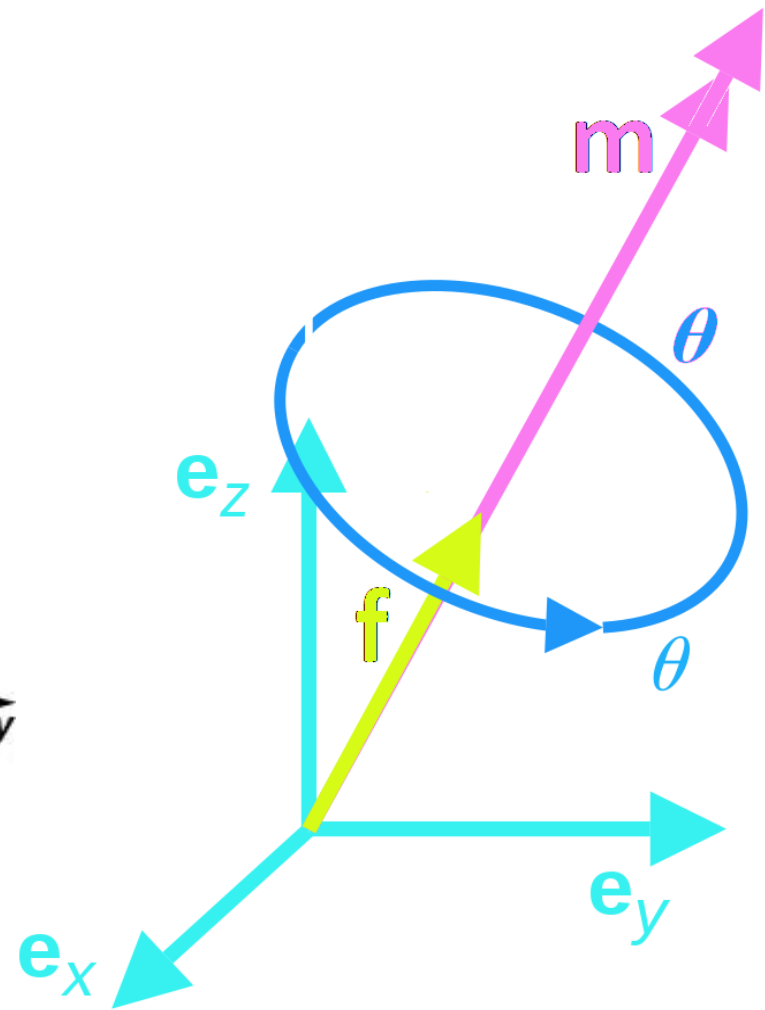
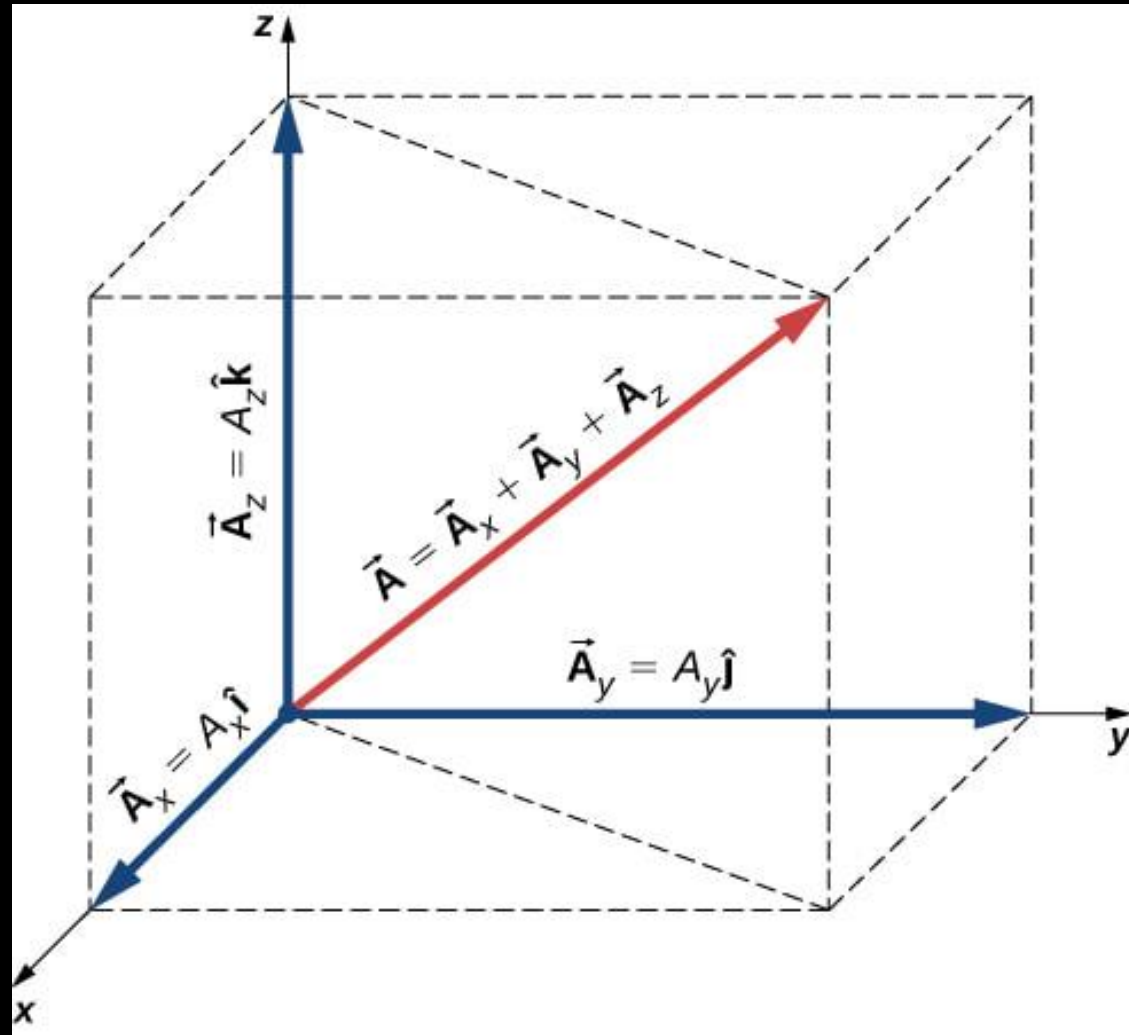
1. ESFUERZO AXIAL PURO

ECUACIONES MATRICIALES LOCALES 3D EN COORDENADAS GLOBALES



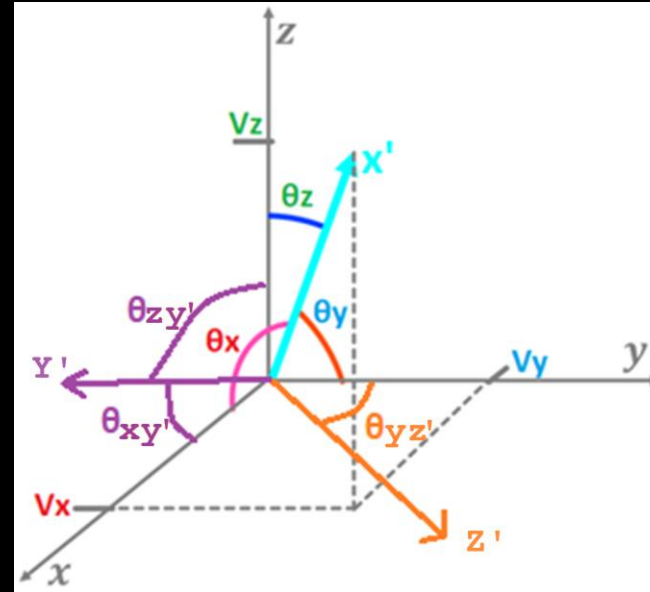
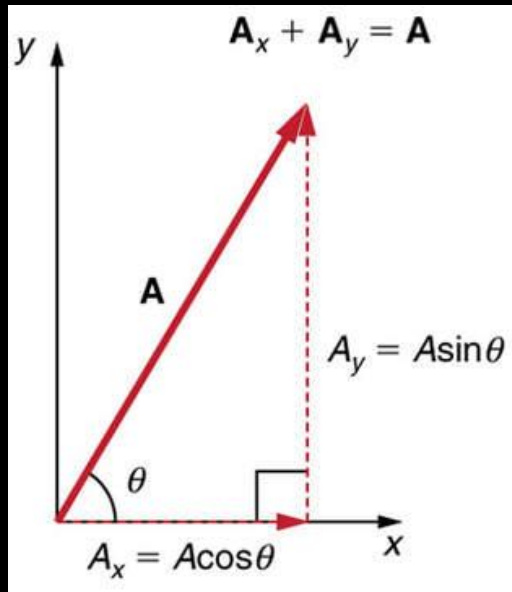
1. ESFUERZO AXIAL PURO

ROTACIÓN DE VECTORES EN 3D



1. ESFUERZO AXIAL PURO

ROTACIÓN DE VECTORES EN 3D



$$\{v\} = [T_o] \{v'\}$$

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \text{COS} \left[\text{Image} \right] \begin{Bmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{Bmatrix}$$

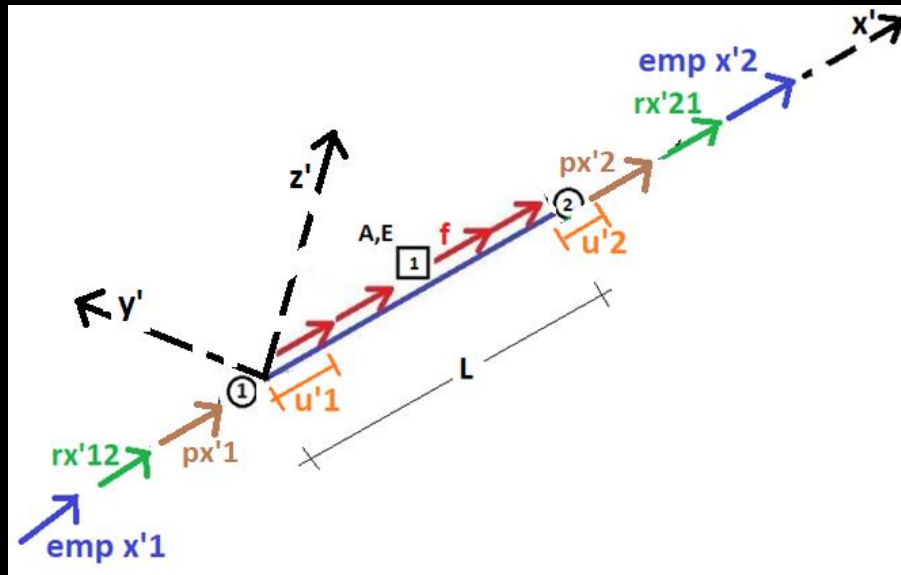


1. ESFUERZO AXIAL PURO

ROTACIÓN DE VECTORES EN 3D

$$\begin{Bmatrix} p_1^{x'} \\ p_2^{x'} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} r'_{12} \\ r'_{21} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} emp_1^{x'} \\ emp_2^{x'} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} [v_{12}] \\ [v_{21}] \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_o] & [0] \\ [0] & [T_o] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [v'_{12}] \\ [v'_{21}] \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} [v_{12}] \\ [v_{21}] \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} [v'_{12}] \\ [v'_{21}] \end{Bmatrix}$$

1. ESFUERZO AXIAL PURO

ECUACIONES MATRICIALES LOCALES 3D EN COORDENADAS GLOBALES

$$\{r\}^i + \{p\}^i = [k]^i \{d\}^i + \{emp\}^i$$

$$\begin{Bmatrix} r_{12}^x \\ r_{12}^y \\ r_{12}^z \\ r_{21}^x \\ r_{21}^y \\ r_{21}^z \end{Bmatrix}^i + \begin{Bmatrix} p_1^x \\ p_1^y \\ p_1^z \\ p_2^x \\ p_2^y \\ p_2^z \end{Bmatrix}^i = [k]^i \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix}^i + \begin{Bmatrix} emp_1^x \\ emp_1^y \\ emp_1^z \\ emp_2^x \\ emp_2^y \\ emp_2^z \end{Bmatrix}^i$$



1. ESFUERZO AXIAL PURO

ROTACIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ LOCAL EN COORDENADAS LOCALES

$$r' + p' = k' d' + emp'$$

$$T^{-1}r + T^{-1}p = k'T^{-1}d + T^{-1}emp$$

$$T(T^{-1}r + T^{-1}p) = T(k'T^{-1}d + T^{-1}emp)$$

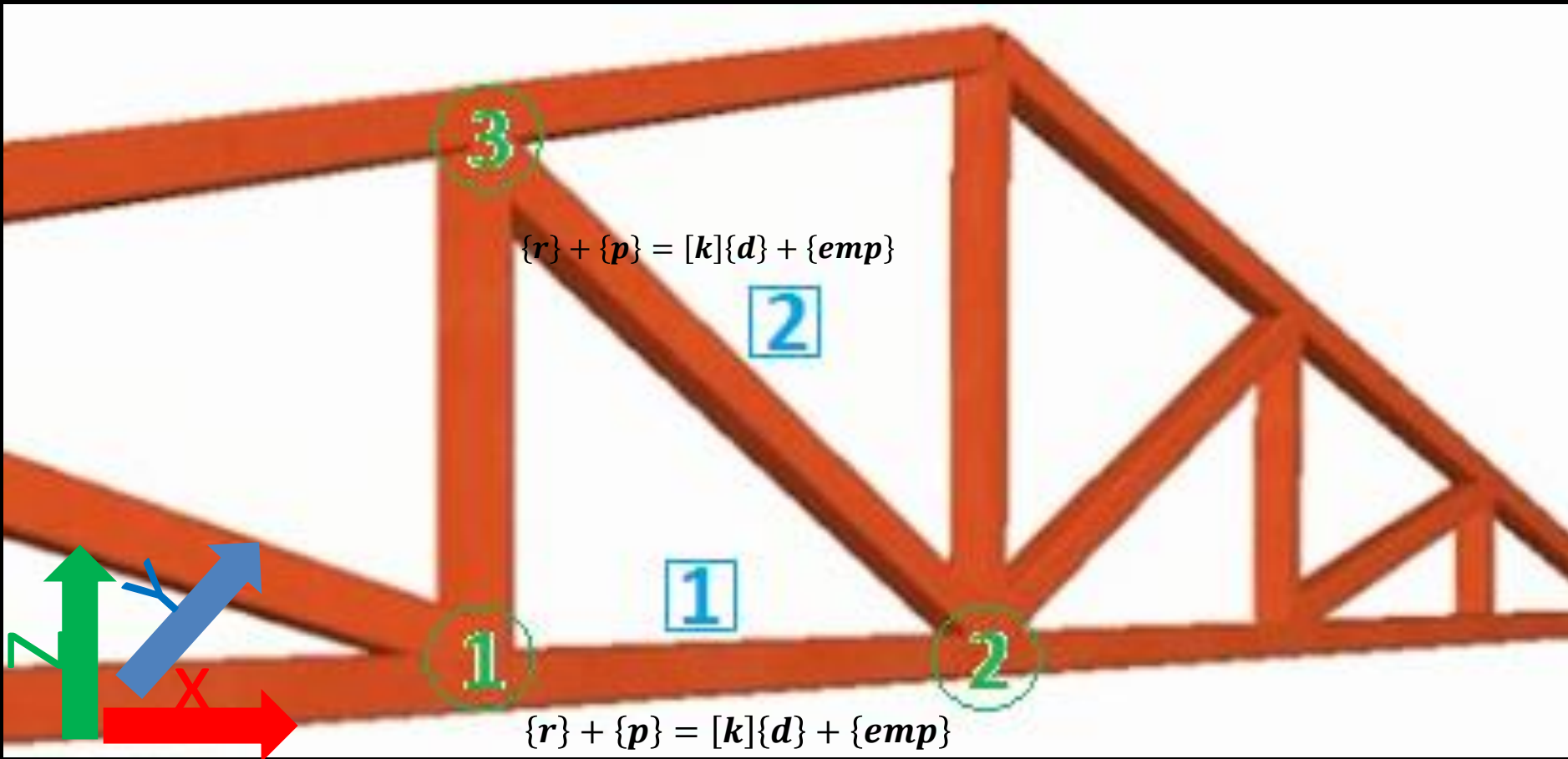
$$r + p = [Tk'T^{-1}]d + emp$$

$$r + p = [k]d + emp$$



1. ESFUERZO AXIAL PURO

ENSAMBLAJE DE ECUACIONES MATRICIALES LOCALES EN COORDENADAS GLOBALES



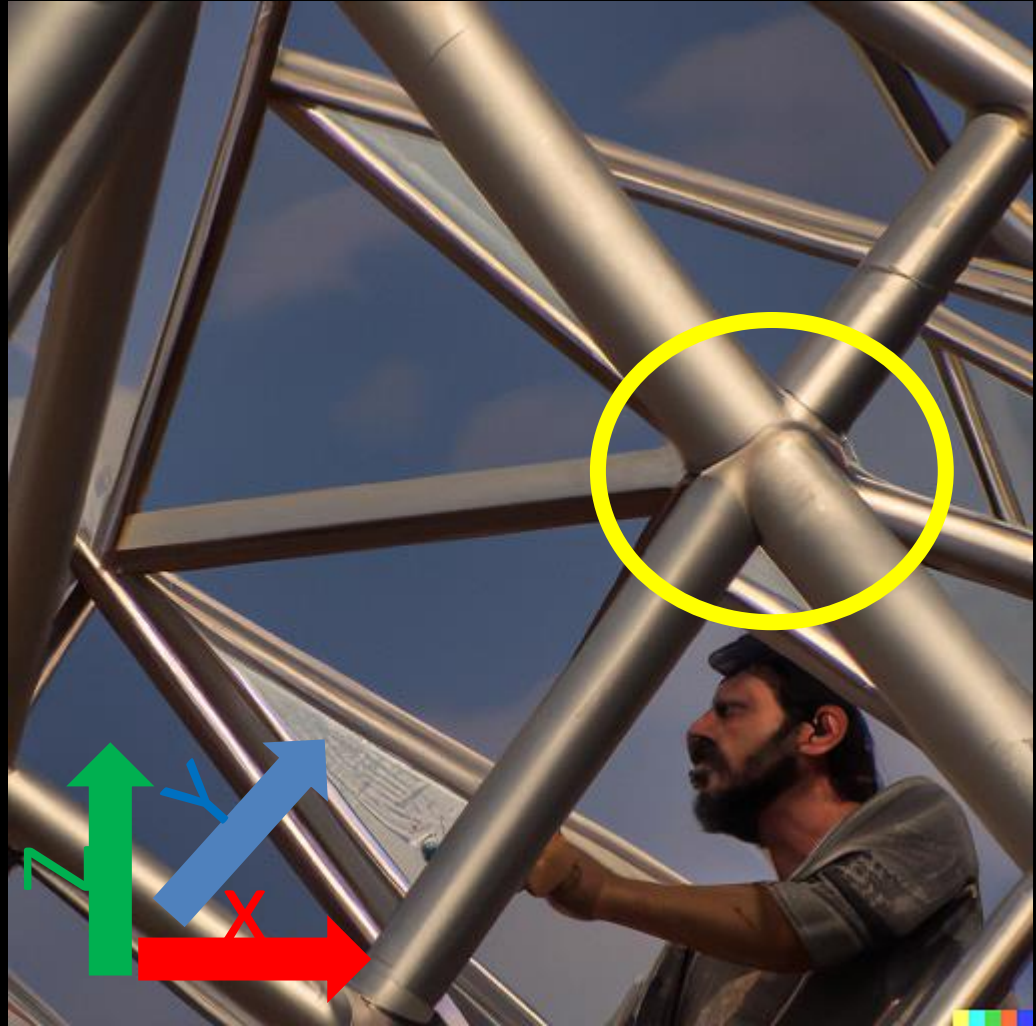
1. ESFUERZO AXIAL PURO

ENSAMBLAJE DE ECUACIONES MATRICIALES LOCALES EN COORDENADAS GLOBALES

$$\sum \{r\}_i$$

$$\sum \{p\}_i$$

$$\sum \{emp\}_i$$



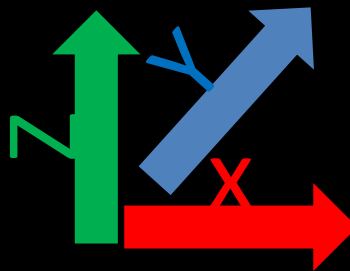
1. ESFUERZO AXIAL PURO

ENSAMBLAJE DE ECUACIONES MATRICIALES LOCALES EN COORDENADAS GLOBALES

$$\sum \{r\}_i$$

$$\sum \{p\}_i$$

$$\sum \{emp\}_i$$



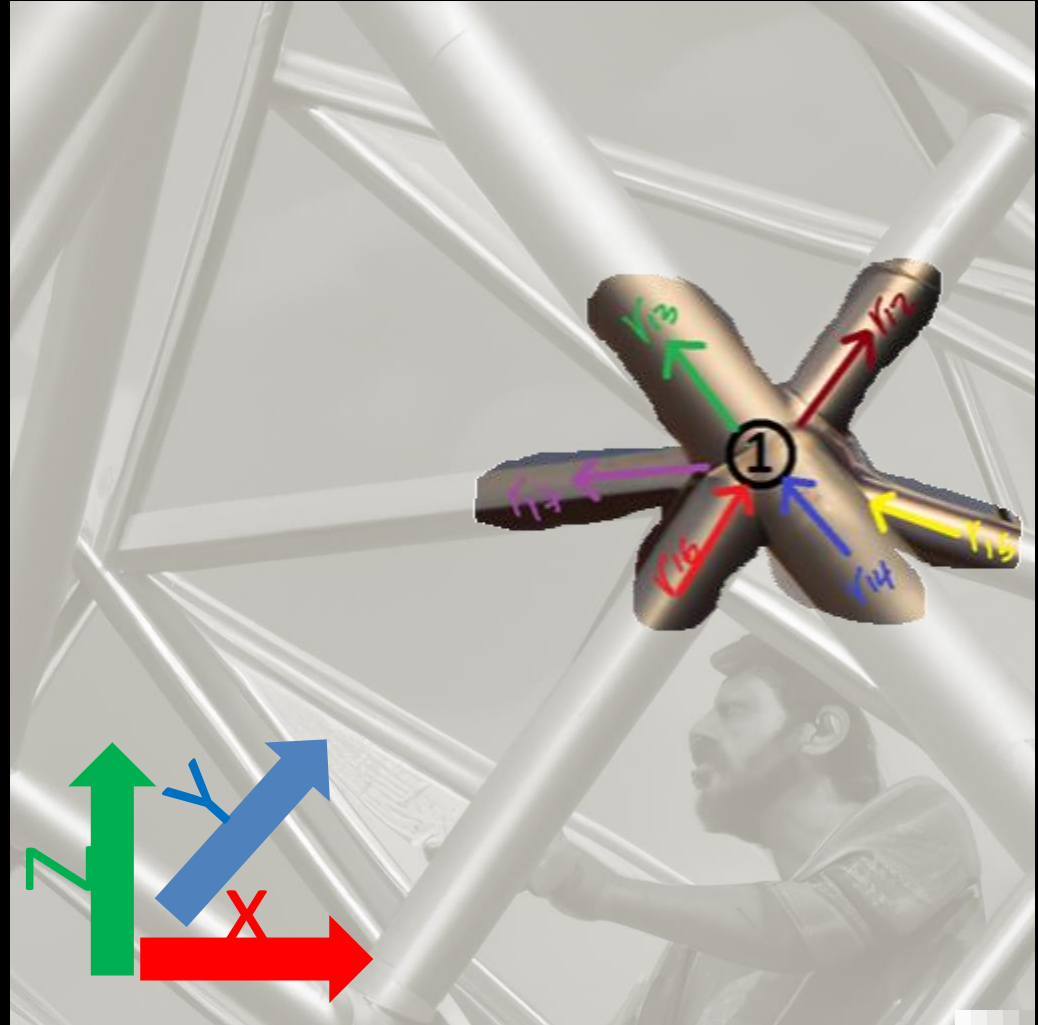
1. ESFUERZO AXIAL PURO

ENSAMBLAJE DE ECUACIONES MATRICIALES LOCALES EN COORDENADAS GLOBALES

$$\sum \{r\}_i$$

$$\sum \{p\}_i$$

$$\sum \{emp\}_i$$

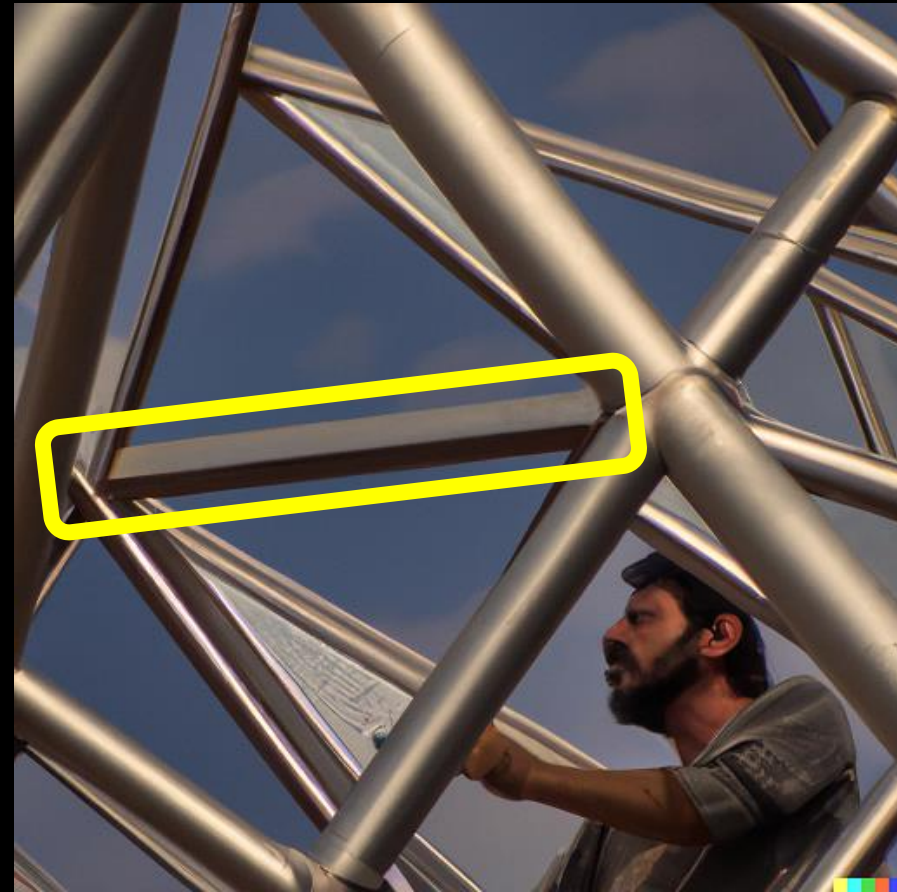


1. ESFUERZO AXIAL PURO

ENSAMBLAJE DE ECUACIONES MATRICIALES LOCALES EN COORDENADAS GLOBALES

$$K_i = \left(\frac{AE}{L} \right)_i \begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_{ini} \\ v'_{ini} \\ w'_{ini} \\ u'_{fin} \\ v'_{fin} \\ w'_{fin} \end{Bmatrix}$$

$$K_i = \begin{bmatrix} K_i^{11} & K_i^{12} \\ K_i^{21} & K_i^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{ini} \\ d_{fin} \end{Bmatrix}$$

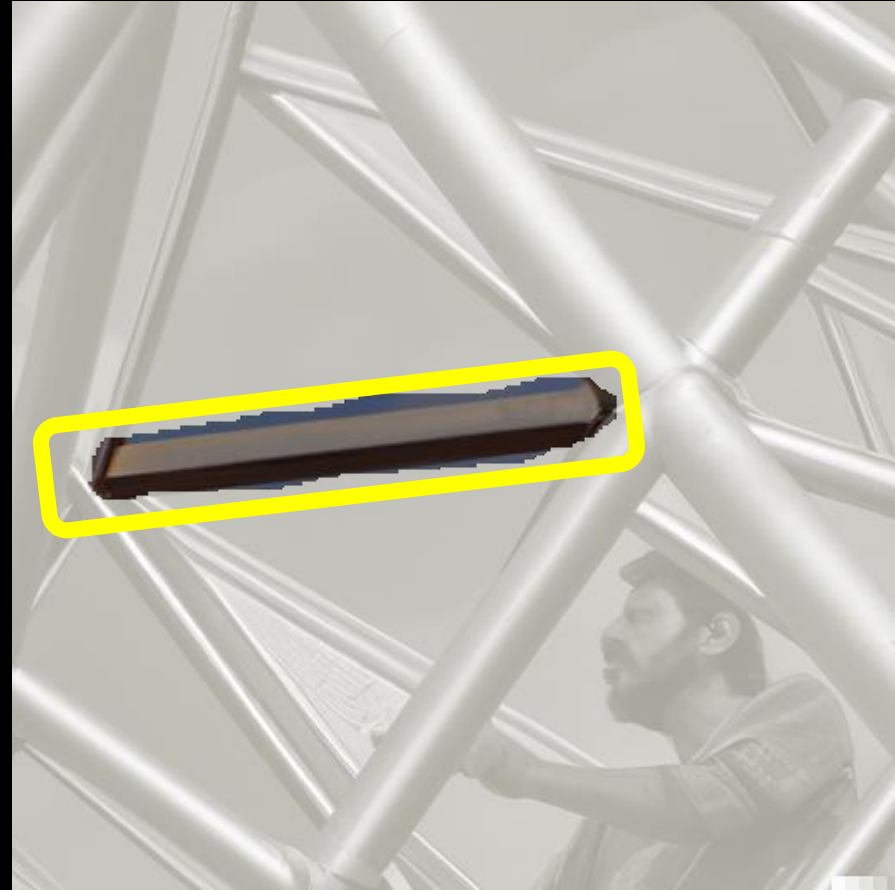


1. ESFUERZO AXIAL PURO

ENSAMBLAJE DE ECUACIONES MATRICIALES LOCALES EN COORDENADAS GLOBALES

$$K_i = \left(\frac{AE}{L} \right)_i \begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_{ini} \\ v'_{ini} \\ w'_{ini} \\ u'_{fin} \\ v'_{fin} \\ w'_{fin} \end{Bmatrix}$$

$$K_i = \begin{bmatrix} K_i^{11} & K_i^{12} \\ K_i^{21} & K_i^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{ini} \\ d_{fin} \end{Bmatrix}$$

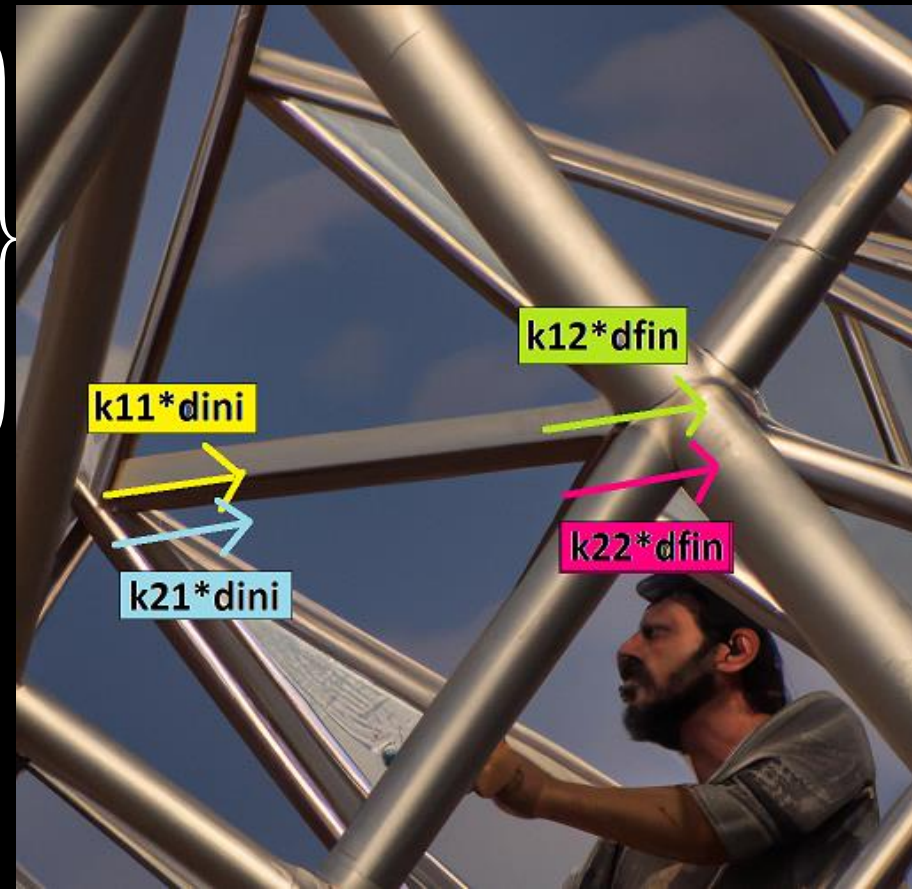


1. ESFUERZO AXIAL PURO

ENSAMBLAJE DE ECUACIONES MATRICIALES LOCALES EN COORDENADAS GLOBALES

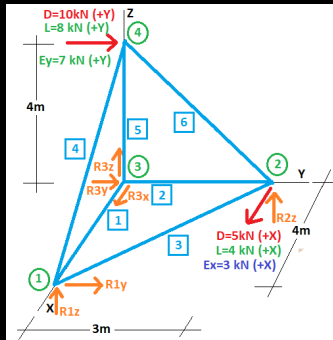
$$K_i = \left(\frac{AE}{L} \right)_i \begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_{ini} \\ v'_{ini} \\ w'_{ini} \\ u'_{fin} \\ v'_{fin} \\ w'_{fin} \end{Bmatrix}$$

$$K_i = \begin{bmatrix} K_i^{11} & K_i^{12} \\ K_i^{21} & K_i^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{ini} \\ d_{fin} \end{Bmatrix}$$



1. ESFUERZO AXIAL PURO

ENSAMBLAJE DE ECUACIONES MATRICIALES LOCALES EN COORDENADAS GLOBALES



[k] [KN/cm]					
u'1	v'1	w'1	u'3	v'3	w'3
5	0	0	-5	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
-5	0	0	5	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

MATRICES AGRANDADAS DEL ELEMENTO 1

n	[K]											
	1			2			3			4		
	u1	v1	w1	u2	v2	w2	u3	v3	w3	u4	v4	w4
1	5	0	0	0	0	0	-5	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-5	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



1. ESFUERZO AXIAL PURO

ECUACIÓN MATRICIAL GLOBAL

$$\{R\} + \{P\} = [K]\{D\} + \{EMP\}$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{n-1} \\ R_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1,n-1} & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2,n-1} & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ K_{n-1,1} & K_{n-1,2} & \dots & K_{n-1,n-1} & K_{n-1,n} \\ K_{n1} & K_{n,2} & \dots & K_{n,n-1} & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{n-1} \\ D_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} EMP_1 \\ EMP_2 \\ \vdots \\ EMP_{n-1} \\ EMP_n \end{Bmatrix}$$

1. ESFUERZO AXIAL PURO

SUBESTRUCTURACIÓN DE LA ECUACIÓN MATRICIAL GLOBAL

$$\{R\} + \{P\} = [K]\{D\} + \{EMP\}$$

$$\begin{Bmatrix} R_a \\ R_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_a \\ P_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_a \\ D_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} EMP_a \\ EMP_b \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_a = \{0\} \\ R_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_a \\ P_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_a \\ D_b = \{0\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} EMP_a \\ EMP_b \end{Bmatrix}$$



1. ESFUERZO AXIAL PURO

SUBESTRUCTURACIÓN DE LA ECUACIÓN MATRICIAL GLOBAL

$$\{R\} + \{P\} = [K]\{D\} + \{EMP\}$$

$$\begin{Bmatrix} \{0\} \\ R_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_a \\ P_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} \\ K_{ba} \end{bmatrix} \{D_a\} + \begin{Bmatrix} EMP_a \\ EMP_b \end{Bmatrix}$$

$$\{0\} + \{P_a\} = [K_{aa}]\{D_a\} + \{EMP_a\}$$

$$\{R_b\} + \{P_b\} = [K_{ba}]\{D_a\} + \{EMP_b\}$$

1. ESFUERZO AXIAL PURO

SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN

ECUACIÓN MATRICIAL GLOBAL

$$\{P_a\} = [K_{aa}]\{D_a\} + \{EMP_a\}$$

$$[K_{aa}]\{D_a\} = \{P_a\} - \{EMP_a\}$$

$$[K_{aa}]^{-1}[K_{aa}]\{D_a\} = [K_{aa}]^{-1}(\{P_a\} - \{EMP_a\})$$

$$\{D_a\} = [K_{aa}]^{-1}(\{P_a\} - \{EMP_a\})$$

$$\{R_b\} = [K_{ba}]\{D_a\} + \{EMP_b\} - \{P_b\}$$

Gracias

Créditos a:

<https://openai.com/dall-e-2> - <https://aminoapps.com/> - <https://miprofe.com/> - <https://www.youtube.com/@EASYCTE> -

Michel Bolaños Guerrero, Ing. C., Esp., Mag.
Candidato a Doctor en Ingeniería – Énfasis en Mecánica de Sólidos

Facultad de Ingeniería - Especialización en Estructuras

<https://michel.udenar.edu.co/> - michel@udenar.edu.co

Universidad de Nariño

