

# ESPECIALIZACIÓN EN ESTRUCTURAS ANÁLISIS ESTRUCTURAL AVANZADO

## ELEMENTOS UNIDIMENSIONALES ESFUERZOS COMBINADOS

**Michel Bolaños Guerrero,**

Ing. Civil, Especialista en Estructuras,

Magister en Ingeniería – Énfasis en Ingeniería Civil,

Candidato a Doctor en Ingeniería – Énfasis en Mecánica de Sólidos

2023-B

Facultad de Ingeniería - Especialización en Estructuras

<https://michel.udenar.edu.co/> - [michel@udenar.edu.co](mailto:michel@udenar.edu.co)

**Universidad de Nariño**



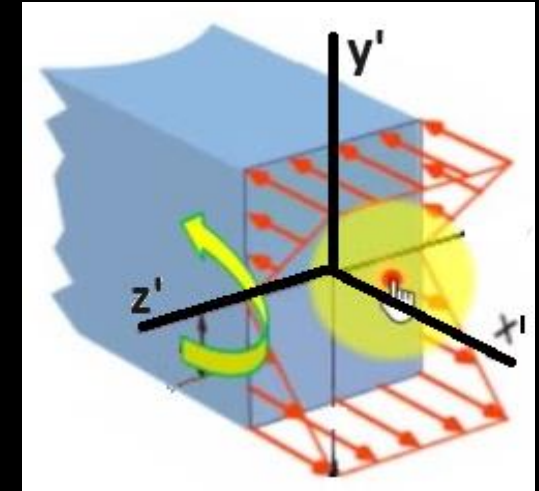
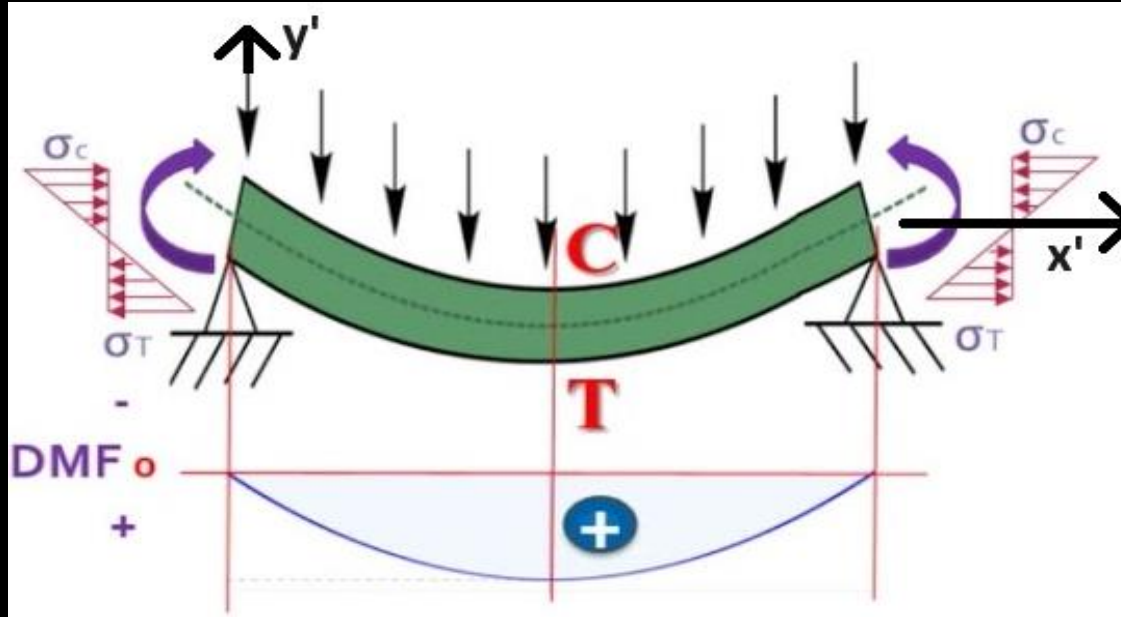
# ELEMENTOS UNIDIMENSIONALES

## ESFUERZOS COMBINADOS

1. Flexión pura  $x'y'$ .
2. Flexión pura  $z'x'$ .
3. Torsión pura.
4. Flexo-tensión-torsión 3D.

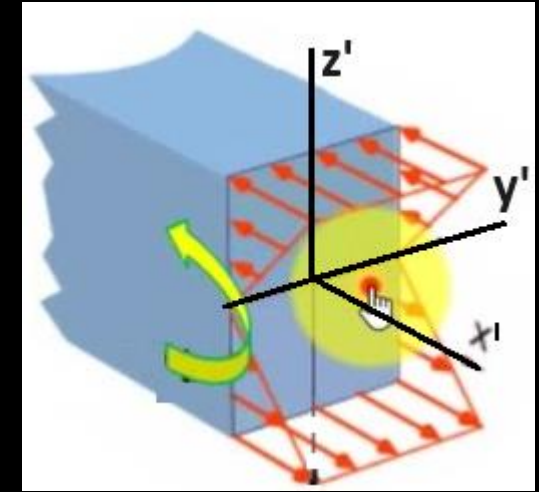
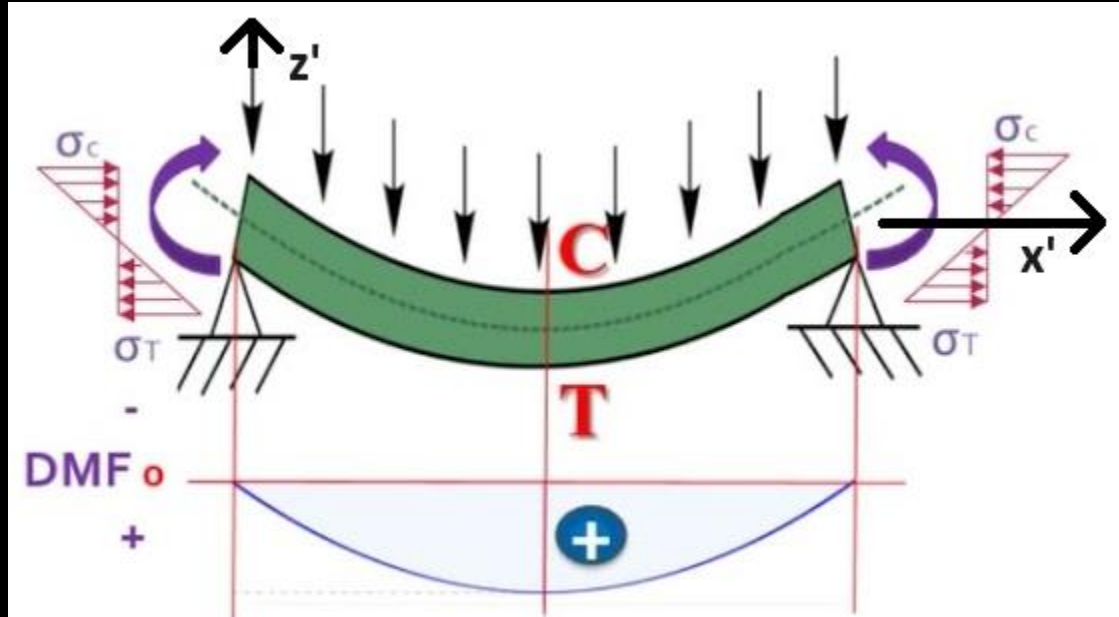


# 2. FLEXIÓN PURA X'Y'



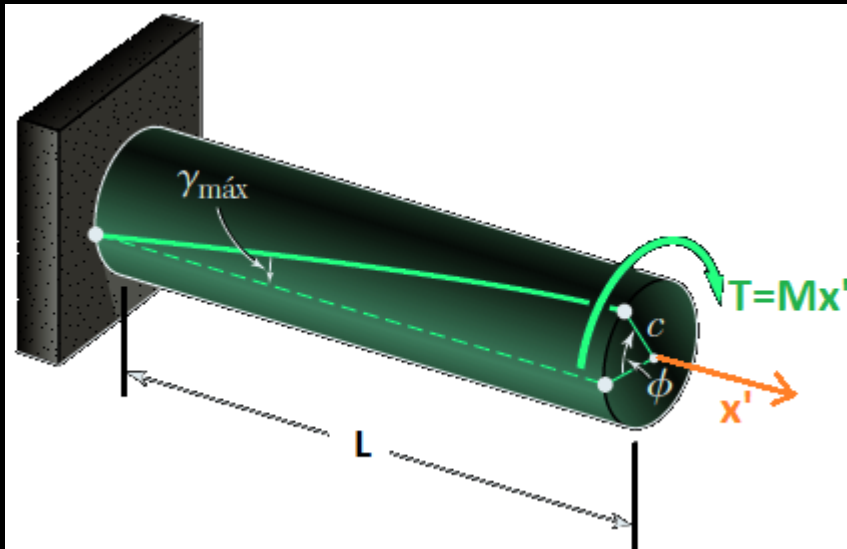
$$\begin{Bmatrix} ry'_{12} \\ mz'_{12} \\ ry'_{21} \\ mz'_{21} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^{y'} \\ p_1^{mz'} \\ p_2^{y'} \\ p_2^{mz'} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v'_1 \\ \theta_1^{z'} \\ v'_2 \\ \theta_2^{z'} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} emp_1^{y'} \\ emp_1^{mz'} \\ emp_2^{y'} \\ emp_2^{mz'} \end{Bmatrix}$$

## 2. FLEXIÓN PURA Z'X'



$$\begin{Bmatrix} rz'_{12} \\ my'_{12} \\ rz'_{21} \\ my'_{21} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^{z'} \\ p_1^{my'} \\ p_2^{z'} \\ p_2^{my'} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 4 & \frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L} & \frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 2 & \frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w'_1 \\ \theta_1^{y'} \\ w'_2 \\ \theta_2^{y'} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} emp_1^{z'} \\ emp_1^{my'} \\ emp_2^{z'} \\ emp_2^{my'} \end{Bmatrix}$$

# 3. TORSIÓN PURA



$$M^{x'} = \frac{GJ}{L} \theta^{x'}$$

$$G = \frac{2}{2(1 + \mu)} \quad J = \int_A r^2 dA$$

## ECUACIÓN MATRICIAL LOCAL 1D EN COORDENADAS LOCALES

$$\{r'\} + \{p'\} = [k']\{d'\} + \{emp'\}$$

$$\begin{Bmatrix} r_{12}^{x'} \\ r_{21}^{x'} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^{mx'} \\ p_2^{mx'} \end{Bmatrix} = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1^{x'} \\ \theta_2^{x'} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} emp_1^{mx'} \\ emp_2^{mx'} \end{Bmatrix}$$



# 4. FLEXO-TENSIÓN-TORSIÓN 3D

## ECUACIONES MATRICIALES LOCALES 3D EN COORDENADAS LOCALES

$$\{r'\}^i + \{p'\}^i = [k']^i \{d'\}^i + \{emp'\}^i$$

$$\begin{Bmatrix} x'1 \\ y'1 \\ z'1 \\ Mx'1 \\ My'1 \\ Mz'1 \\ x'2 \\ y'2 \\ z'2 \\ Mx'2 \\ My'2 \\ Mz'2 \end{Bmatrix}^i + \{p'\}^i = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}^i \begin{Bmatrix} u'1 \\ v'1 \\ w'1 \\ \theta x'1 \\ \theta y'1 \\ \theta z'1 \\ u'2 \\ v'2 \\ w'2 \\ \theta x'2 \\ \theta y'2 \\ \theta z'2 \end{Bmatrix}^i + \{emp'\}^i$$


# 4. FLEXO-TENSIÓN-TORSIÓN 3D

## ECUACIONES MATRICIALES LOCALES 3D EN COORDENADAS GLOBALES

$$\{r\}^i + \{p\}^i = [k]^i \{d\}^i + \{emp\}^i$$

$$\begin{Bmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \\ Mx1 \\ My1 \\ Mz1 \\ x2 \\ y2 \\ z2 \\ Mx2 \\ My2 \\ Mz2 \end{Bmatrix}^i + \{p\}^i = \left[ \begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{array} \right]^i \begin{Bmatrix} u1 \\ v1 \\ w1 \\ \theta x1 \\ \theta y1 \\ \theta z1 \\ u2 \\ v2 \\ w2 \\ \theta x2 \\ \theta y2 \\ \theta z2 \end{Bmatrix}^i + \{emp\}^i$$


# 4. FLEXO-TENSIÓN-TORSIÓN 3D

## ENSAMBLAJE DE ECUACIONES MATRICIALES LOCALES EN COORDENADAS GLOBALES

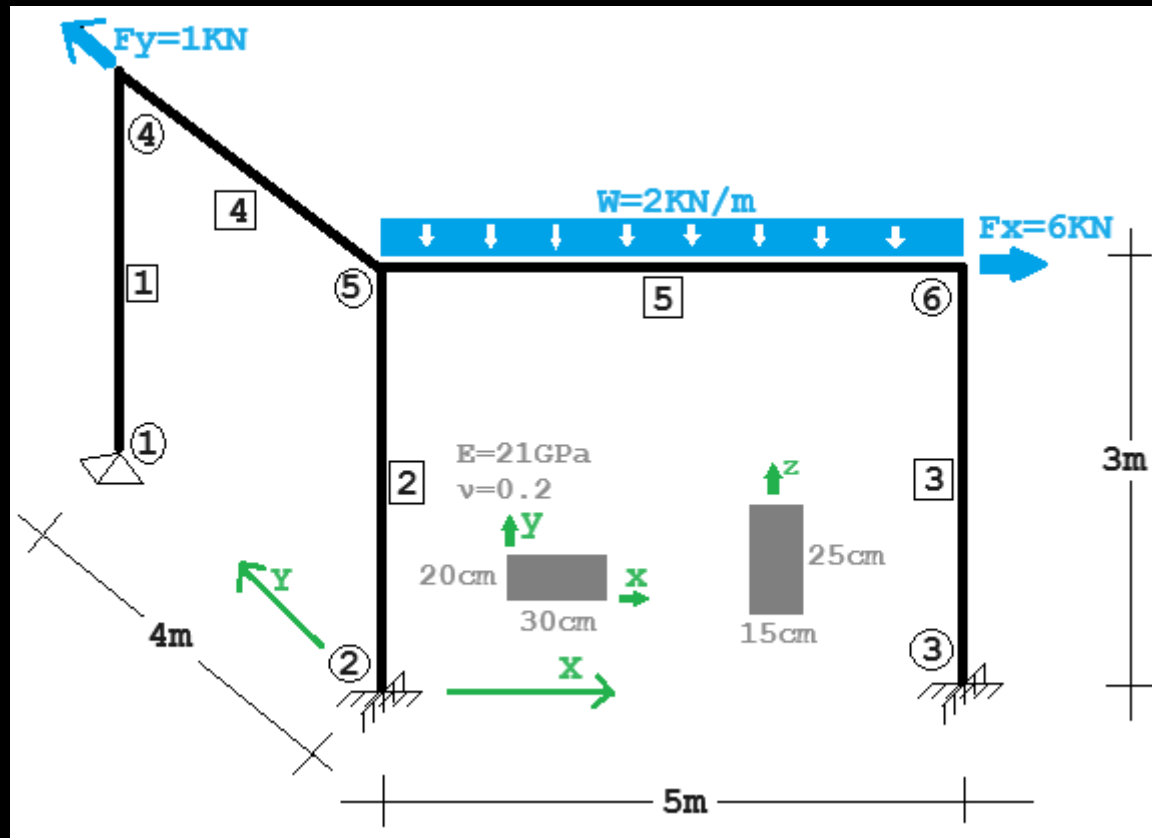
## ECUACIÓN MATRICIAL DE LA ESTRUCTURA

$$\{R\} + \{P\} = [K]\{D\} + \{EMP\}$$

$$\begin{Bmatrix} X1 \\ Y1 \\ Z1 \\ Mx1 \\ My1 \\ Mz1 \\ X2 \\ Y2 \\ Z2 \\ Mx2 \\ My2 \\ Mz2 \end{Bmatrix} + \{P\} = \begin{Bmatrix} u1 \\ v1 \\ w1 \\ \theta x1 \\ \theta y1 \\ \theta z1 \\ u2 \\ v2 \\ w2 \\ \theta x2 \\ \theta y2 \\ \theta z2 \end{Bmatrix} + \{EMP\}$$




# 4. FLEXO-TENSIÓN-TORSIÓN 3D



# Gracias

Créditos a:

<https://openai.com/dall-e-2> - <https://aminoapps.com/> - <https://miprofe.com/> - <https://www.youtube.com/@EASYCTE> -

**Michel Bolaños Guerrero, Ing. C., Esp., Mag.**  
Candidato a Doctor en Ingeniería – Énfasis en Mecánica de Sólidos

Facultad de Ingeniería - Especialización en Estructuras

<https://michel.udenar.edu.co/> - [michel@udenar.edu.co](mailto:michel@udenar.edu.co)

**Universidad de Nariño**

