

ESPECIALIZACIÓN EN ESTRUCTURAS ANÁLISIS ESTRUCTURAL AVANZADO

ELEMENTOS PLANOS CON EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Michel Bolaños Guerrero,

Ing. Civil, Especialista en Estructuras,
Magister en Ingeniería – Énfasis en Ingeniería Civil,
Candidato a Doctor en Ingeniería – Énfasis en Mecánica de Sólidos

2023-B

Facultad de Ingeniería - Especialización en Estructuras

<https://michel.udenar.edu.co/> - michel@udenar.edu.co

Universidad de Nariño

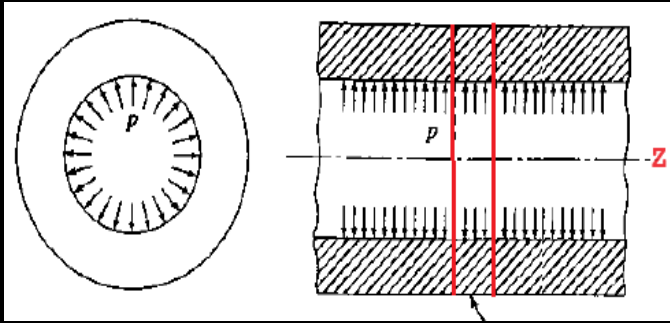


ELEMENTOS PLANOS CON MEF

1. Deformación unitaria plana.
2. Esfuerzo plano.
3. Membrana.
4. Placas.
5. Cáscaras.



1. DEFORMACIÓN UNITARIA PLANA

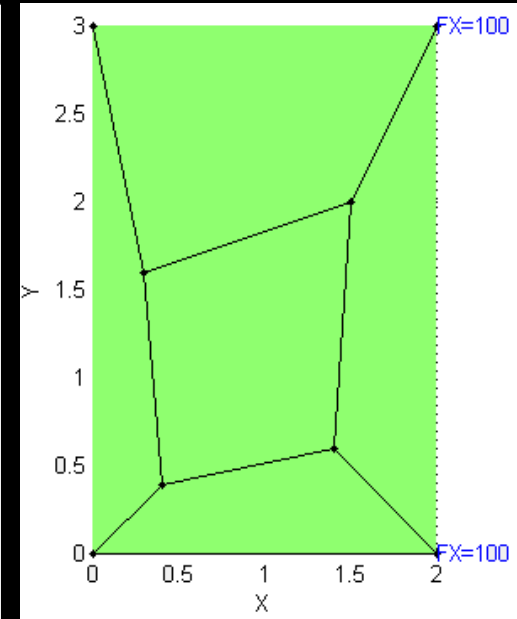
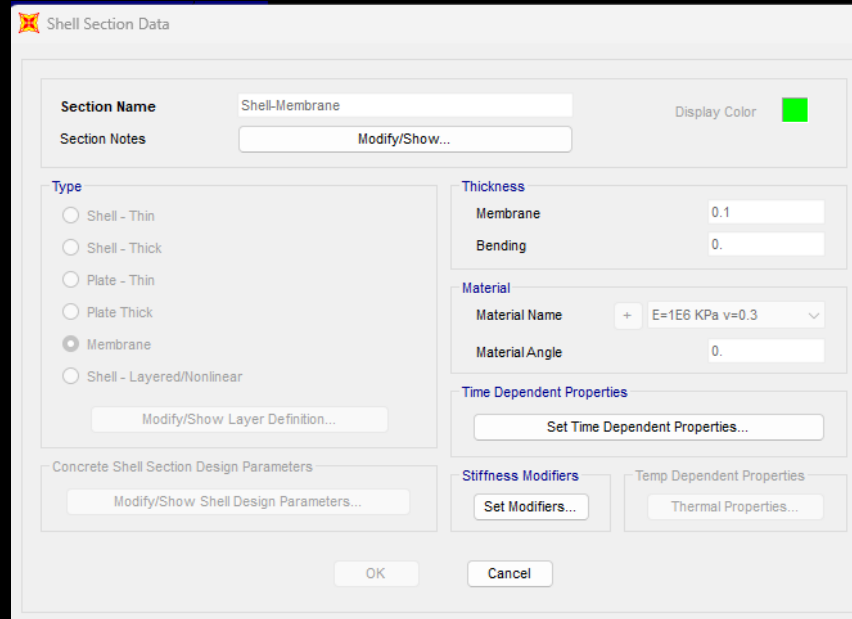
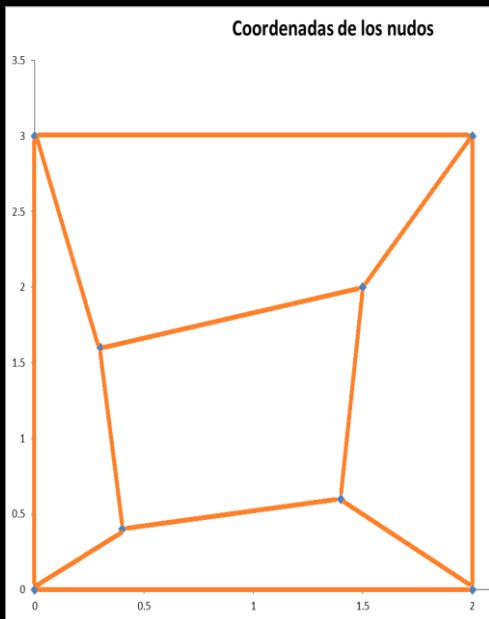


$$\epsilon_z = 0$$

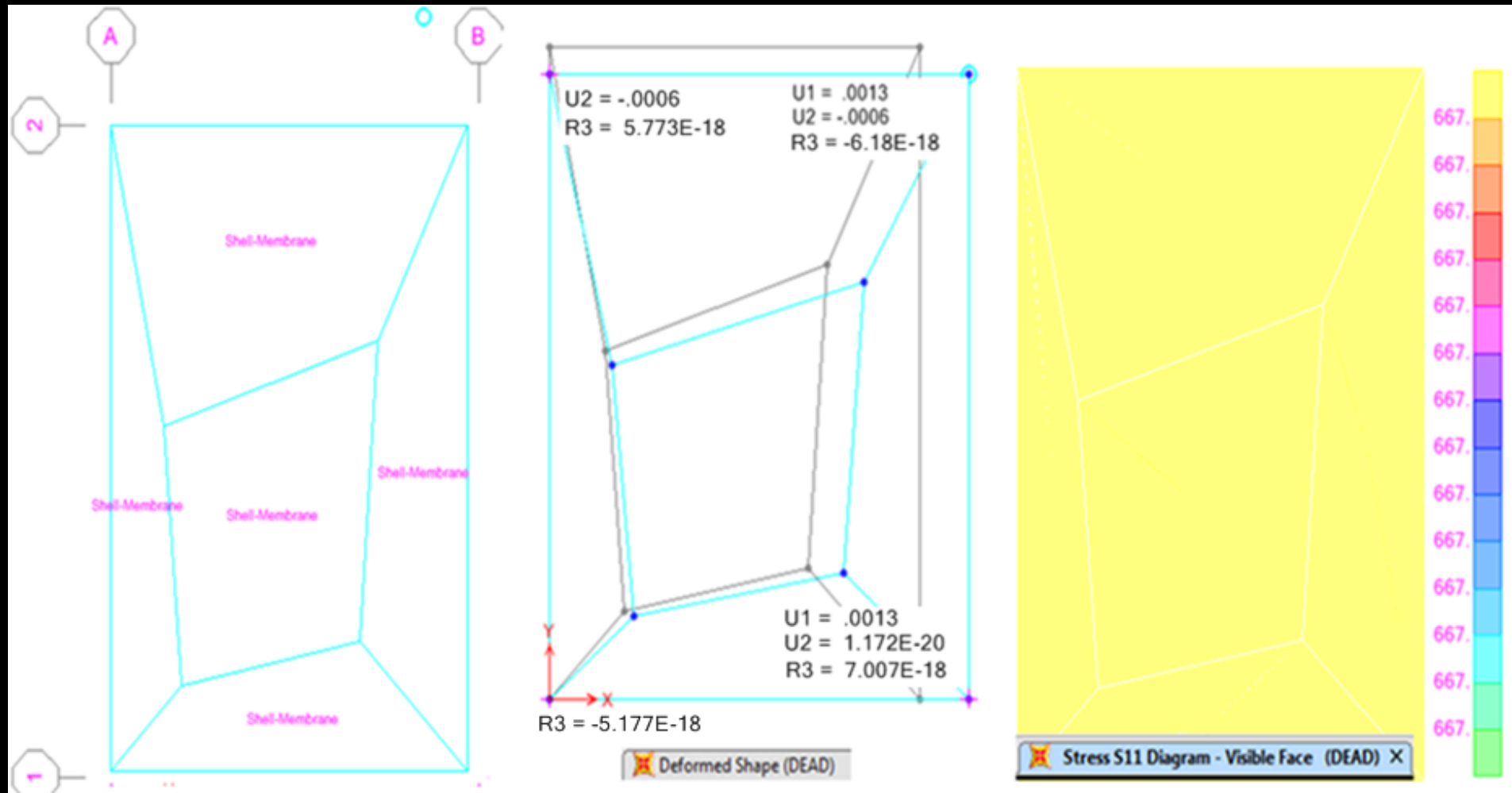
$$\gamma_{zx} = 0$$

$$\gamma_{yz} = 0$$

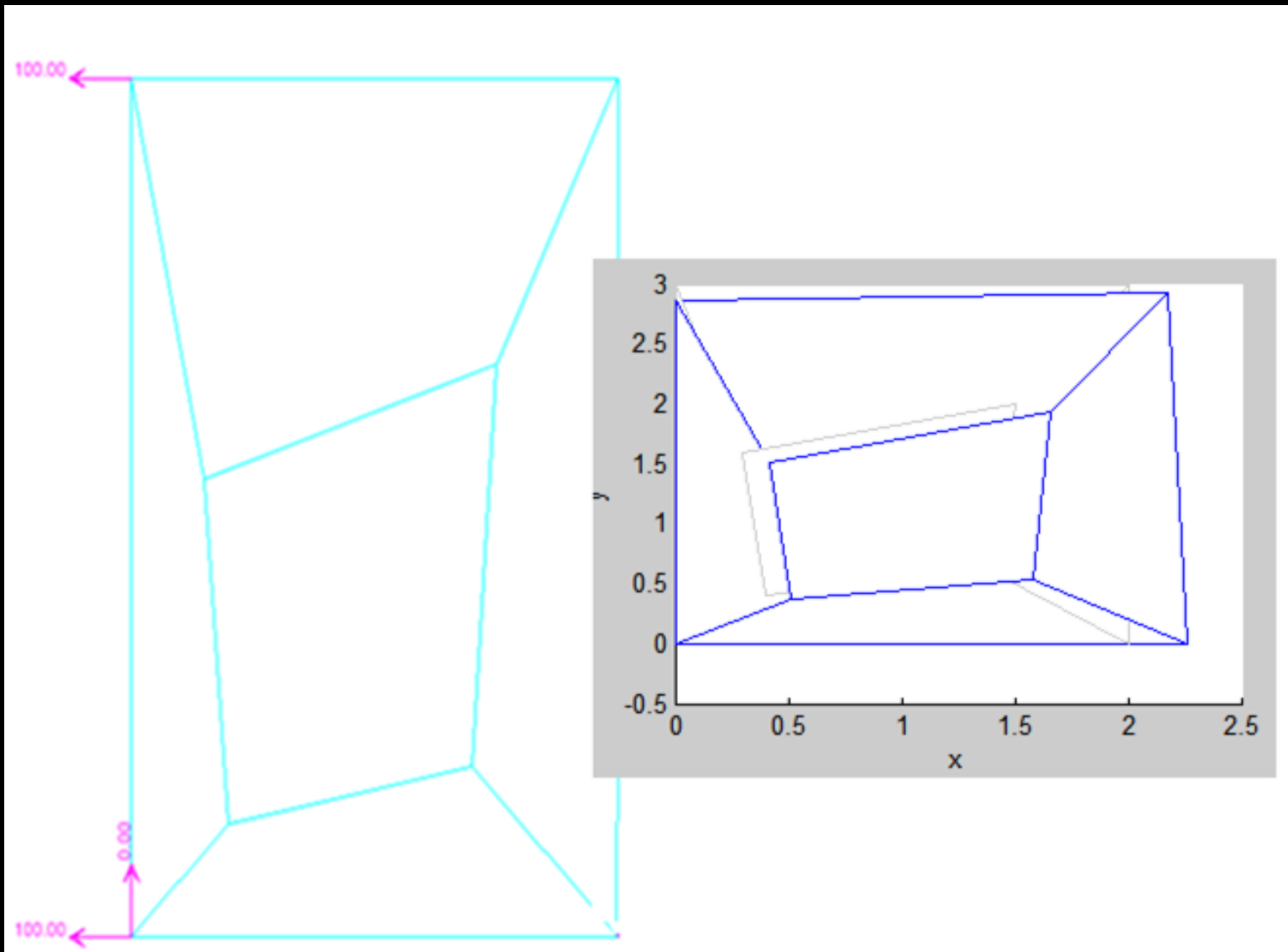
Coordenadas de los nudos		
#	x	y
1	0	0
2	2	0
3	2	3
4	0	3
5	0.4	0.4
6	1.4	0.6
7	1.5	2
8	0.3	1.6



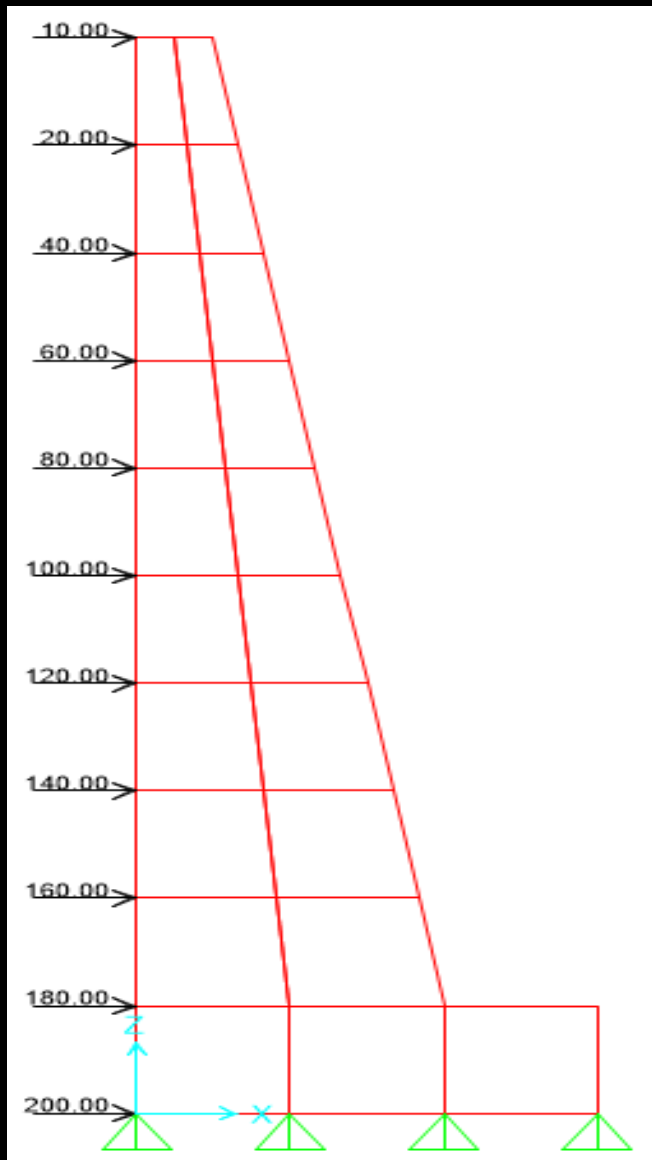
1. DEFORMACIÓN UNITARIA PLANA



1. DEFORMACIÓN UNITARIA PLANA



1. DEFORMACIÓN UNITARIA PLANA

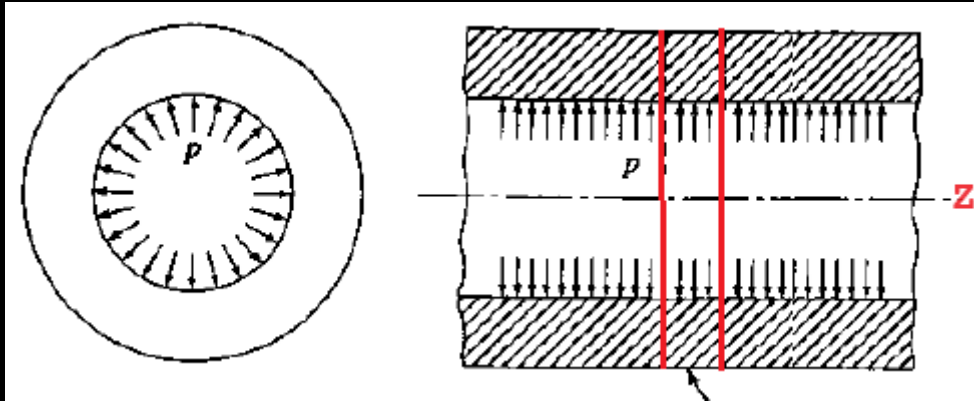


Joint	X	Y	Z
479	0	0	0
482	0	0	2
484	0	0	20
487	2	0	0
488	2	0	2
489	4	0	0
490	4	0	2
491	6	0	0
492	6	0	2
536	1.83333	0	4
537	0	0	4
538	1.66667	0	6
539	0	0	6
540	1.5	0	8
541	0	0	8
542	1.33333	0	10
543	0	0	10
544	1.16667	0	12
545	0	0	12

Joint	X	Y	Z
479	0	0	0
482	0	0	2
484	0	0	20
487	2	0	0
488	2	0	2
489	4	0	0
490	4	0	2
491	6	0	0
492	6	0	2
536	1.83333	0	4
537	0	0	4
538	1.66667	0	6
539	0	0	6
540	1.5	0	8
541	0	0	8
542	1.33333	0	10
543	0	0	10
544	1.16667	0	12
545	0	0	12



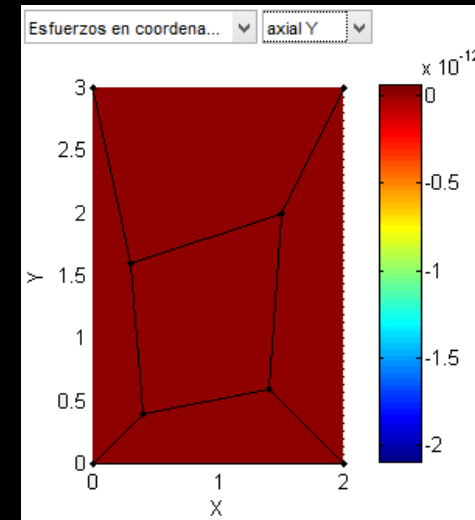
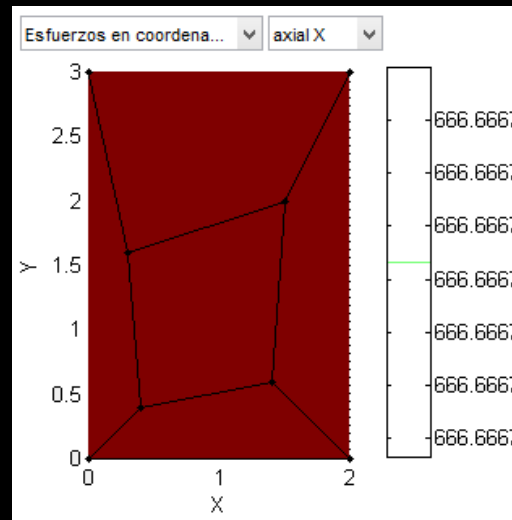
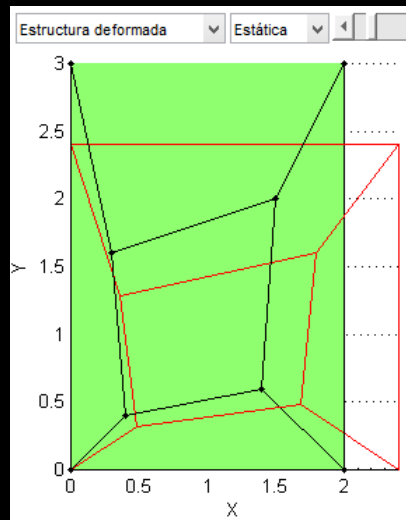
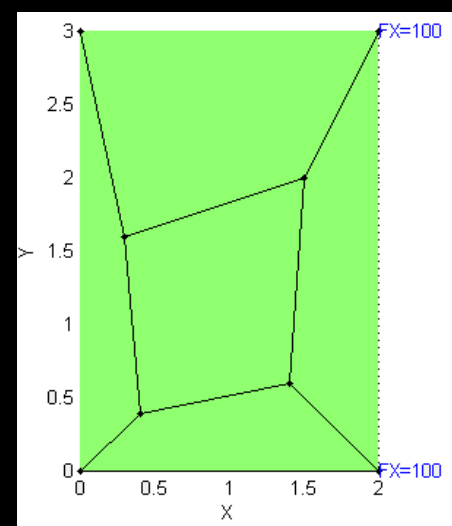
2. ESFUERZO PLANO



$$\epsilon_z = 0$$

$$\gamma_{zx} = 0$$

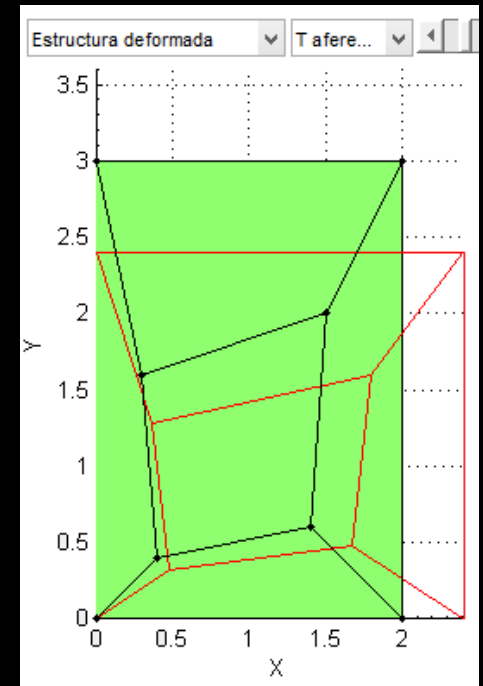
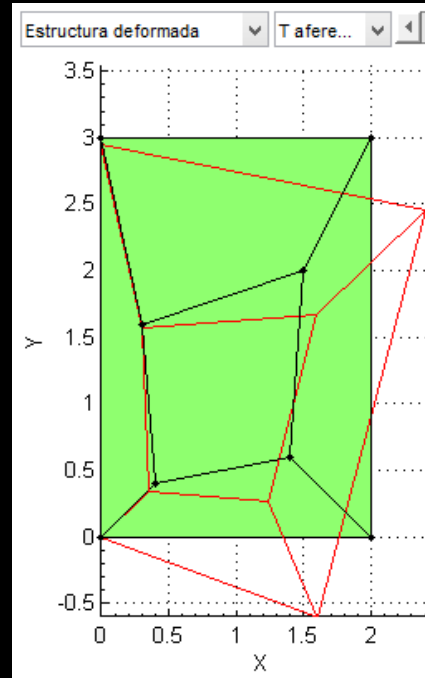
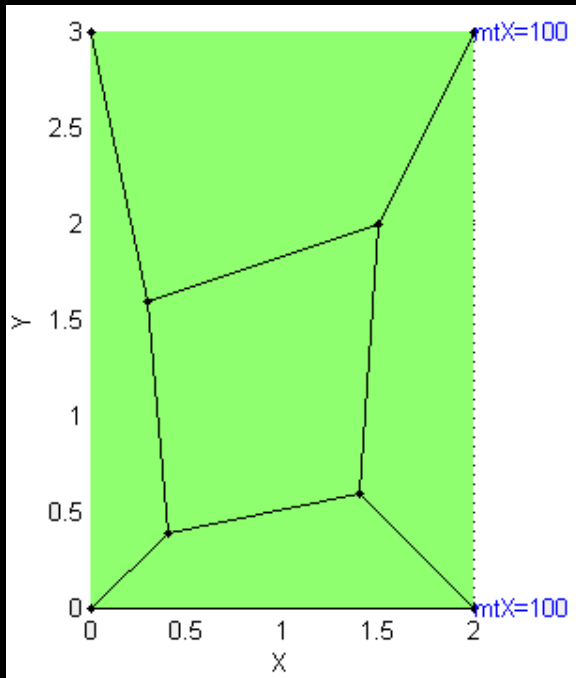
$$\gamma_{yz} = 0$$



Cumple el criterio de la Parcela como se muestra en la Ilustración anterior, con carga total estática en el eje X de 200 kN y un resultado de esfuerzo constante de 666.6 kPa.

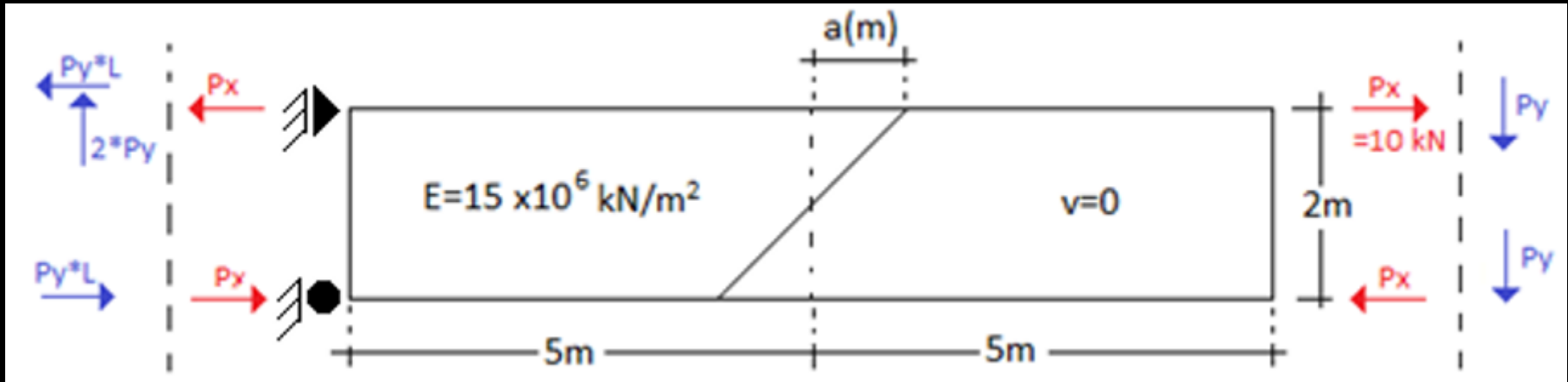


2. ESFUERZO PLANO



Usando unas masas concentradas de $100 \text{ kN}\cdot\text{s}^2/\text{m}$ en cada una de los dos nudos extremos del eje X, obtenemos unos periodos de 0.36 y 0.22 segundos, los cuales son iguales a los comparados con la misma configuración en Sap2000.

2. ESFUERZO PLANO



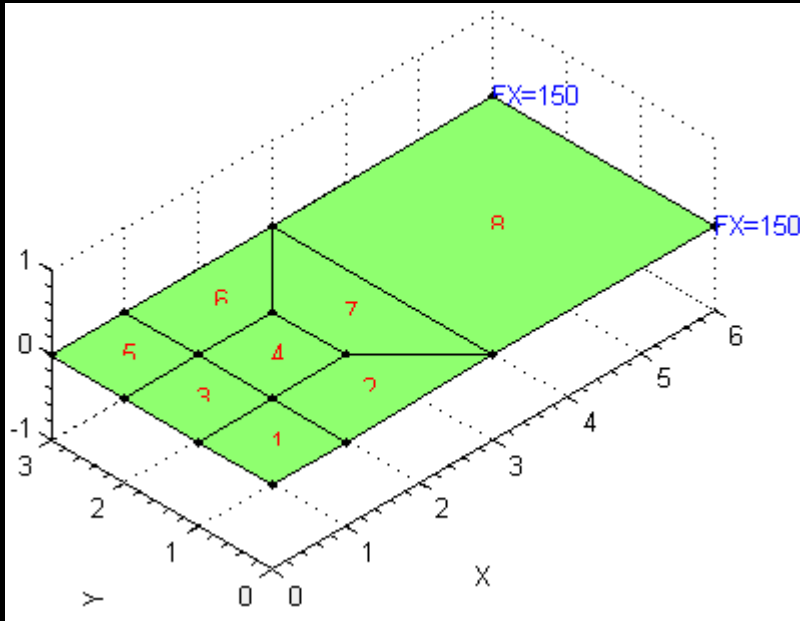
Cálculo teórico (mm)						
Caso de cargas	horizontales Px			verticales Py		
Deformación	u	v	θ	u	v	θ
	-0.2	-1	-0.0002	-0.148	-1	-0.00015
Calculado por Sap2000						
Distorsión a (m)	0	1	2	0	1	2
u	24.2%	12.7%	8.5%	24.6%	13.1%	8.6%
v	24.2%	12.7%	8.5%	24.8%	16.1%	12.2%
Calculado por FEM-e2D						
Distorsión a (m)	0	1	2	0	1	2
u	24.2%	12.7%	8.5%	24.6%	13.1%	8.6%
v	24.2%	12.7%	8.5%	24.8%	16.1%	12.2%



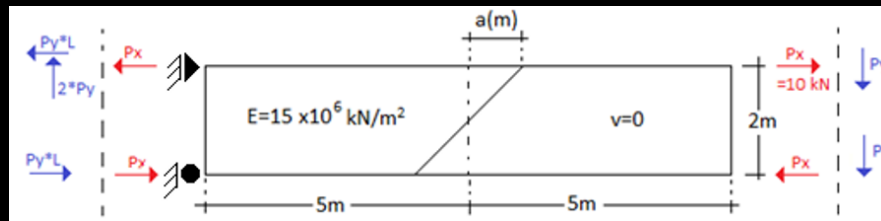
3. MEMBRANA

Prueba de la Parcela de Tylor

Usando la configuración de la estructura presentada por (Geyer, 2000) con una carga axial uniforme de 300 kN sobre una membrana de espesor 0.1 m, con un material de módulo de elasticidad de 1'000.000 kPa y relación de *Poisson* de 0.3, se obtiene un esfuerzo axial constante en el sentido de la carga de 1.000 kPa, una deformación unitaria de alargamiento en el eje de la carga de 0.001 m/m y de acortamiento en los demás ejes de 0.0003 m/m.



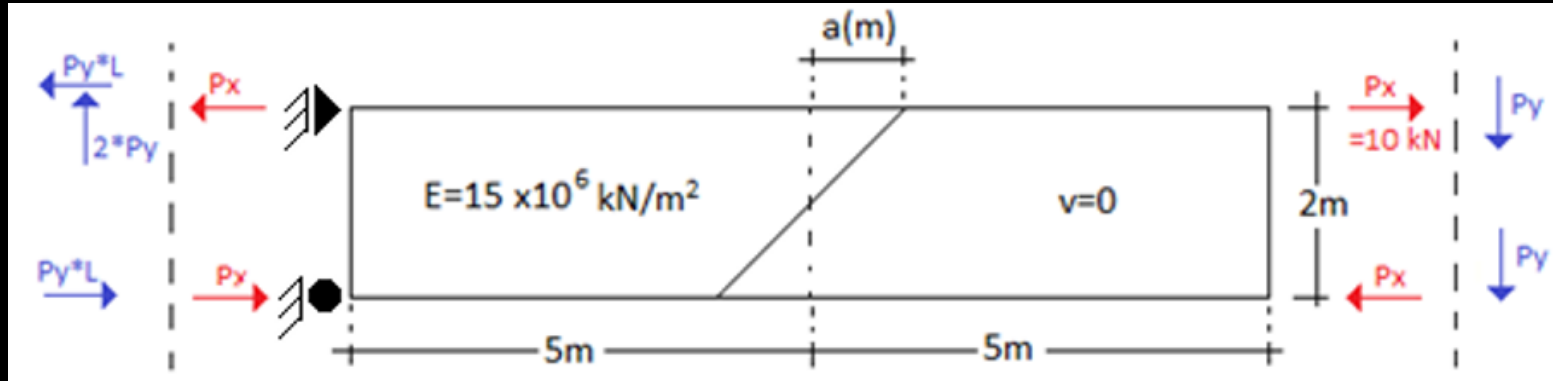
3. MEMBRANA



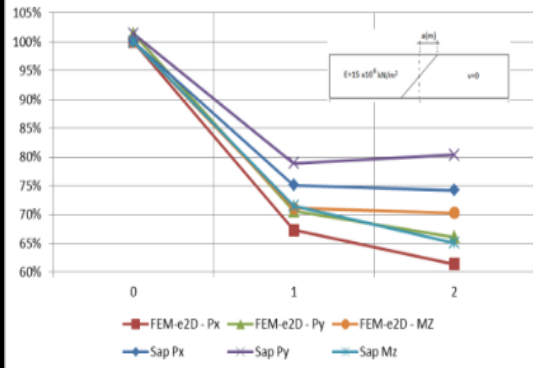
Cálculo Teórico									
Caso de carga:	Horizontales Px			Verticales Py			Momento Mz		
Deformación:	u	v	θ	u	v	θ	u	v	θ
		-0.2	-1	-0.0002	-0.148	-1	-0.00015	-0.2	-1
Calculado con Sap2000									
Distorsión a (m)	0	1	2	0	1	2	0	1	2
u	100.0%	75.1%	74.2%	101.4%	78.9%	80.4%	100.0%	71.5%	65.1%
v	100.0%	75.1%	74.2%	95.8%	81.5%	82.3%	100.7%	71.4%	65.1%
θ	100.0%	-38.0%	-46.0%	100.7%	-30.0%	-37.3%	108.0%	-13.0%	-24.5%
Calculado con FEM-e2D Membrana									
Distorsión a (m)	0	1	2	0	1	2	0	1	2
u	100.0%	67.3%	61.4%	101.4%	70.6%	66.1%	100.0%	71.1%	70.3%
v	100.0%	67.3%	61.4%	95.8%	80.2%	145.3%	100.7%	71.7%	64.4%
θ	100.0%	66.2%	61.7%	100.7%	72.5%	82.4%	109.2%	78.6%	77.6%
Calculado con FEM-e2D Membrana + modos incompatibles									
Distorsión a (m)	0	1	2	0	1	2	0	1	2
u	100.0%	77.1%	389.8%	101.4%	81.0%	422.9%	100.0%	82.2%	468.4%
v	100.0%	77.1%	389.8%	95.8%	91.6%	237.2%	100.7%	81.9%	475.2%
θ	100.0%	76.7%	419.5%	100.7%	81.7%	443.5%	109.2%	92.7%	517.5%



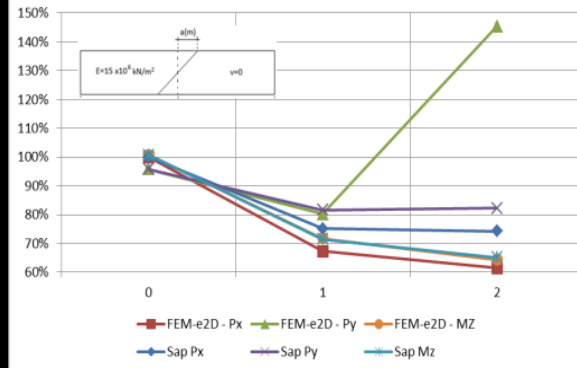
3. MEMBRANA



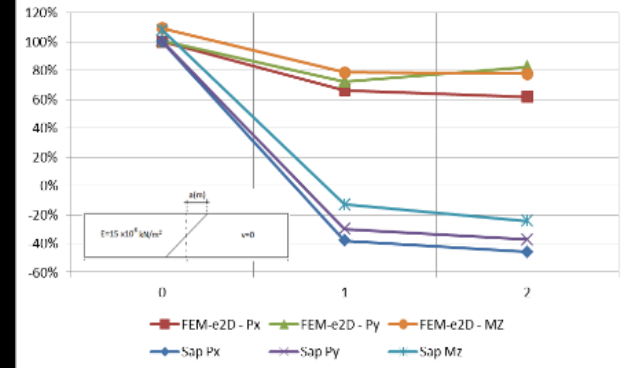
Viga distorsionada A (u)



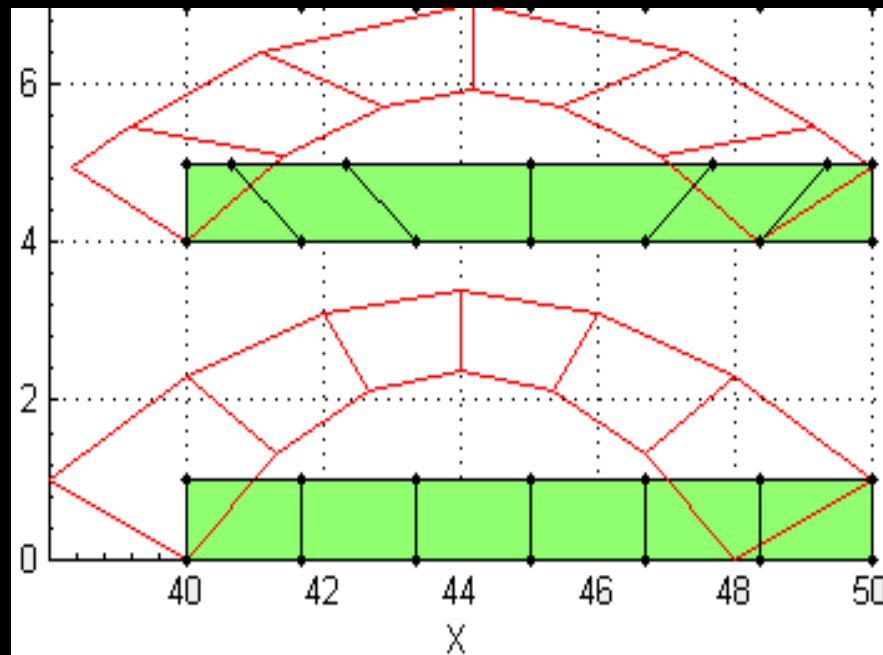
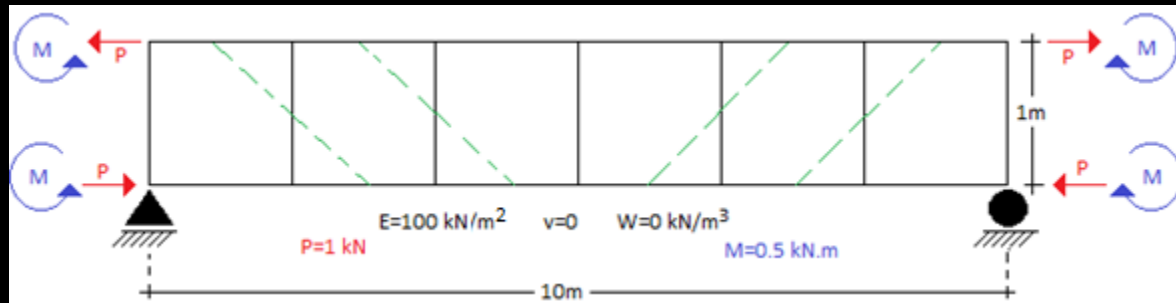
Viga distorsionada A (v)



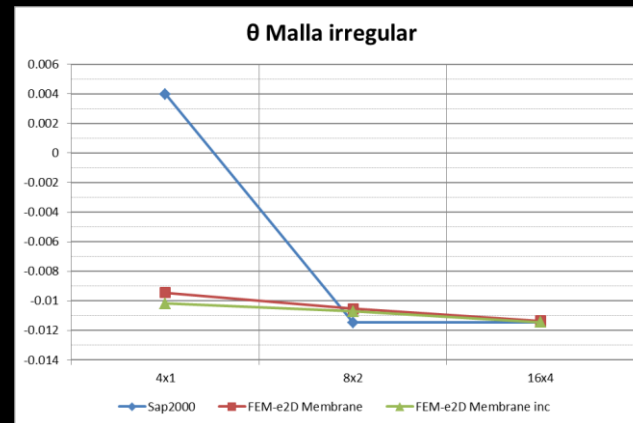
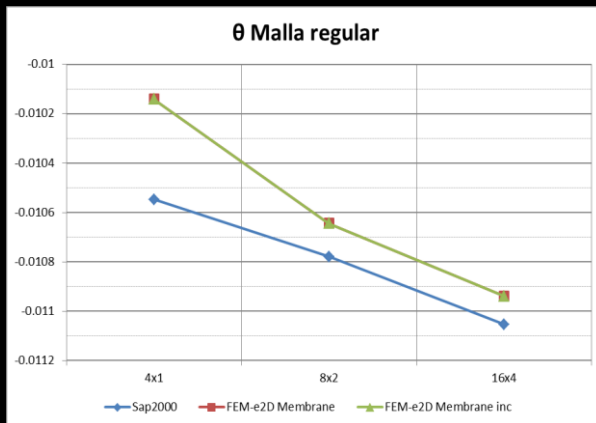
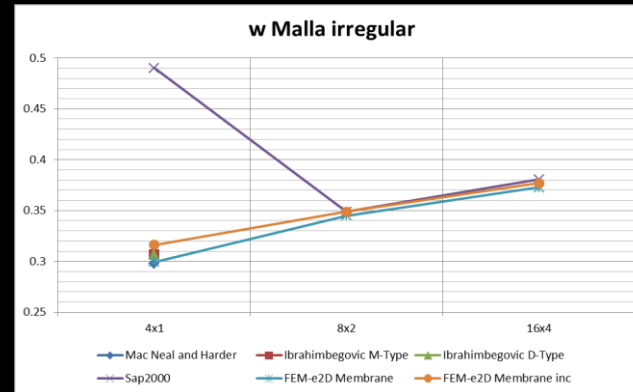
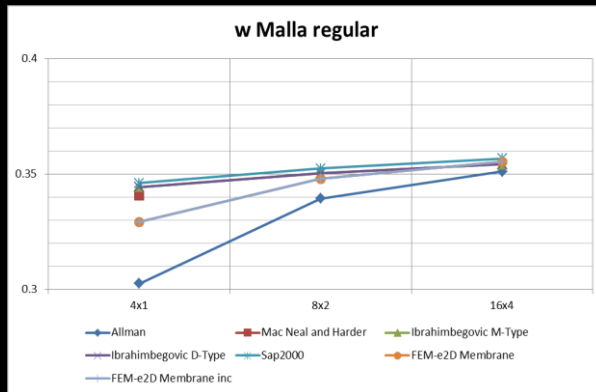
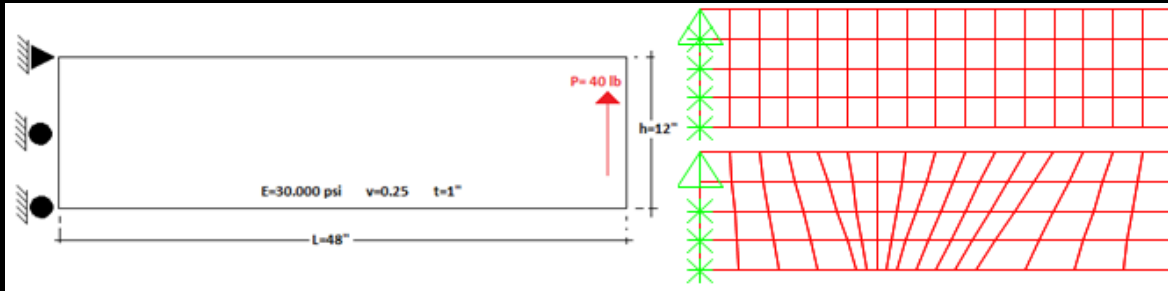
Viga distorsionada A (θz)



3. MEMBRANA

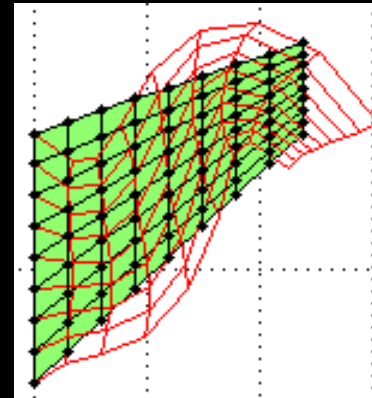
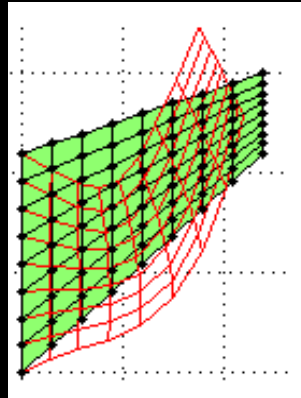
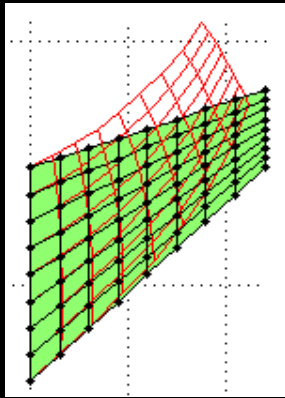
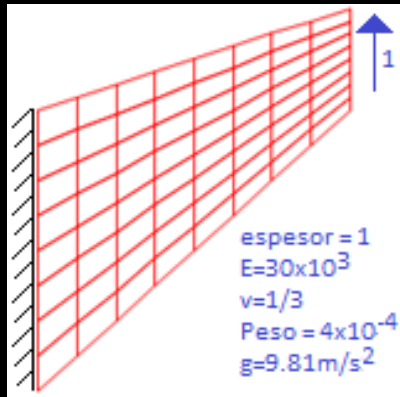


3. MEMBRANA



3. MEMBRANA

Cook's Membrane

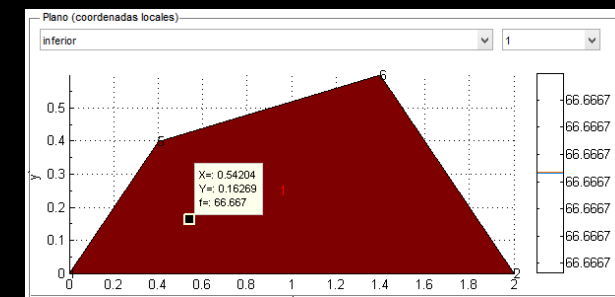
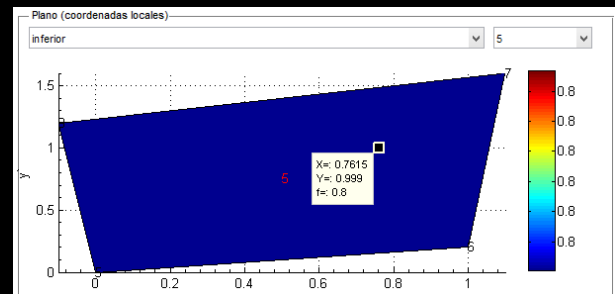
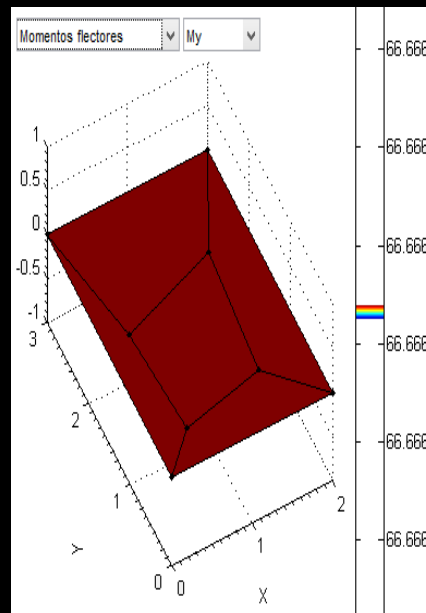
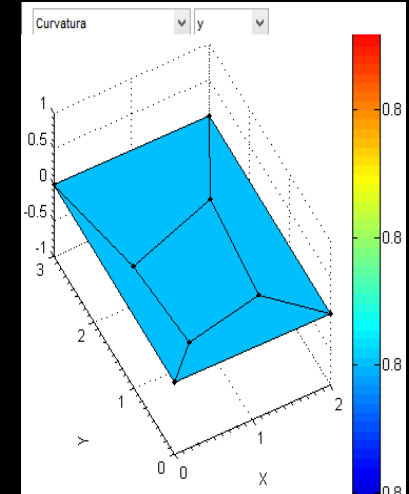
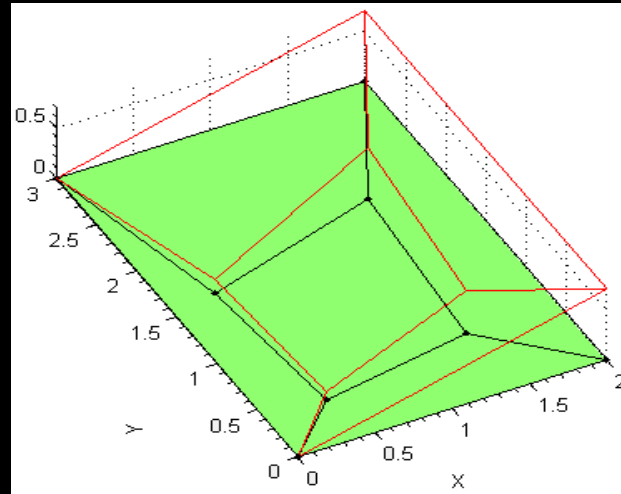
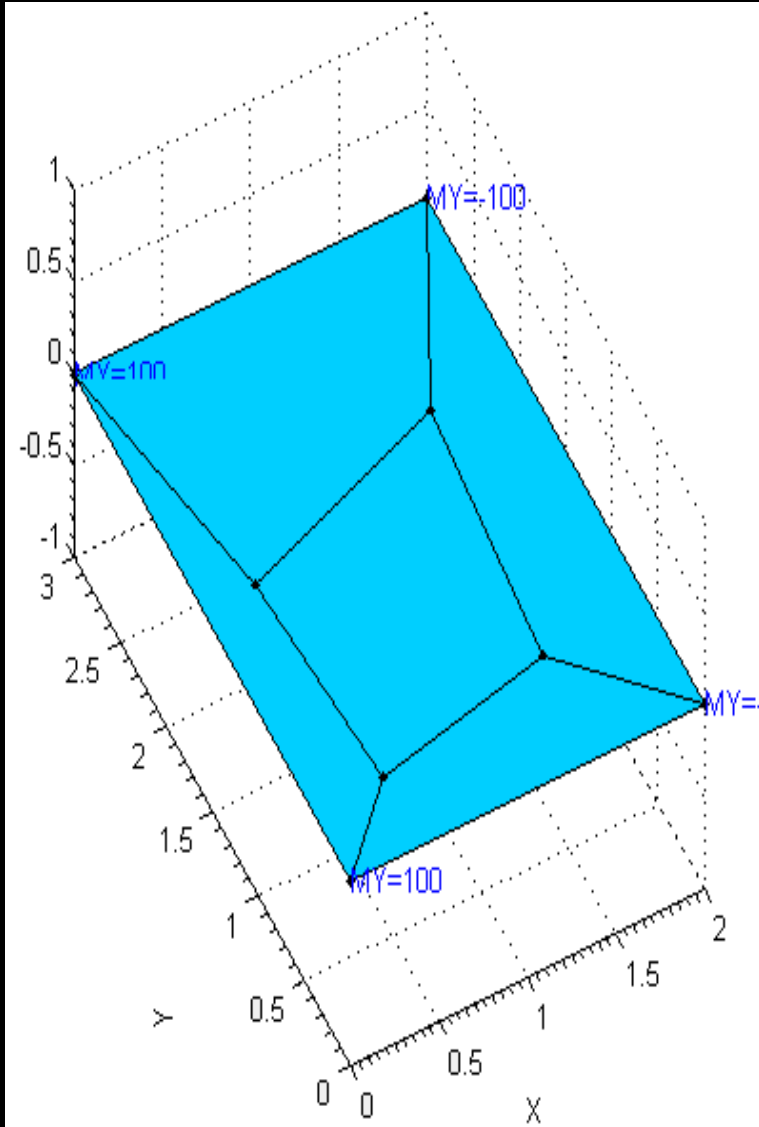


Joint	X (m)	Y (m)	Z (m)
21	0	0	0
22	48	44	0
23	48	60	0
24	0	44	0

Para la estructura irregular mostrada anteriormente, enmallada de forma lo más regular posible, con unidades compatibles, empotrada en el lado izquierdo, con una carga de 1 distribuida hacia arriba en el extremo derecho, una sección con espesor de 1, de material con módulo de elasticidad de 30×10^3 , relación de Poisson de $1/3$, peso de 4×10^{-4} , usando gravedad en metros se obtienen los siguientes resultados:

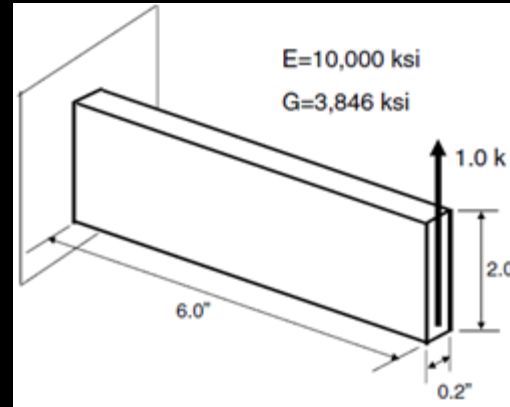
Enmallado	Allman	Simo et al.	Ibrahimbegovic M-Type	Ibrahimbegovic D-Type	Sap2000	FEM-e2D Membrana	FEM-e2D Membr.+inc
1x1		16.743	14.066	14.065	15.5731	11.5844	16.8447
2x2	20.27	21.124	20.683	20.682	20.5239	19.3667	20.1283
4x4	22.78	23.018	22.993	22.984	23.4694	23.1003	23.4349
8x8	23.56	23.685	23.668	23.626	24.4823	24.0880	24.2247

4. PLACAS



4. PLACAS

Viga modelada como placa



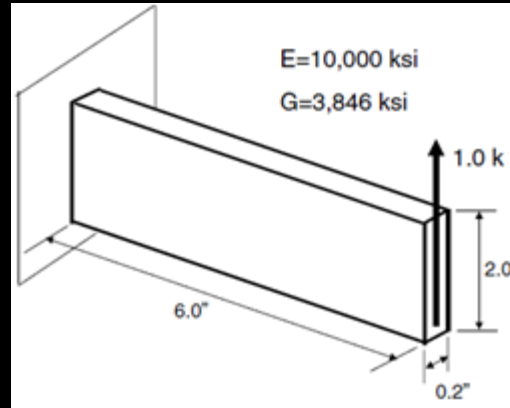
Utilizando la estructura de la ilustración anterior, presentada previamente por (Wilson E. L., 1999), que es una viga en voladizo, se puede apreciar el comportamiento de los modelos de placa para simular el comportamiento de dicha viga.

Tipo	Parámetro	v=0			v=0.3		
		Teoría	FEM	SAP2000	Teoría	FEM	SAP2000
Placa gruesa	w (m)	5.76E-04	5.76E-04	5.76E-04	5.87E-04	5.87E-04	5.87E-04
	T1 aferente (s)	0.250	0.258	0.258	0.250	0.261	0.261
	T1 consistente (s)		0.183			0.186	
Placa delgada	w (m)	5.40E-04	5.40E-04	5.40E-04	5.40E-04	5.40E-04	5.40E-04
	T1 aferente (s)	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250
	T1 consistente (s)		0.195			0.195	

Este caso no requiere refinación, pues los resultados son perfectamente aceptables al compararlos con los resultados teóricos estáticos y dinámicos, tanto en FEM-e2D como Sap2000.

4. PLACAS

Viga modelada como placa



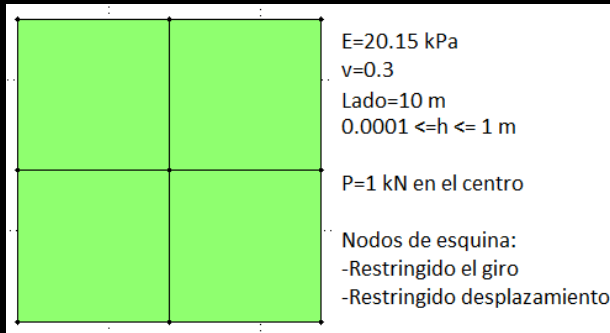
Utilizando la estructura de la ilustración anterior, presentada previamente por (Wilson E. L., 1999), que es una viga en voladizo, se puede apreciar el comportamiento de los modelos de placa para simular el comportamiento de dicha viga.

Tipo	Parámetro	v=0			v=0.3		
		Teoría	FEM	SAP2000	Teoría	FEM	SAP2000
Placa gruesa	w (m)	5.76E-04	5.76E-04	5.76E-04	5.87E-04	5.87E-04	5.87E-04
	T1 aferente (s)	0.250	0.258	0.258	0.250	0.261	0.261
	T1 consistente (s)		0.183			0.186	
Placa delgada	w (m)	5.40E-04	5.40E-04	5.40E-04	5.40E-04	5.40E-04	5.40E-04
	T1 aferente (s)	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250
	T1 consistente (s)		0.195			0.195	

Este caso no requiere refinación, pues los resultados son perfectamente aceptables al compararlos con los resultados teóricos estáticos y dinámicos, tanto en FEM-e2D como Sap2000.

4. PLACAS

Placa con carga puntual al centro

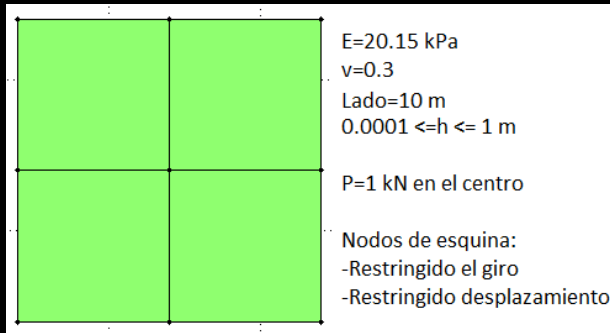


Utilizando unas placas cuadradas, presentada previamente por (Wilson E. L., 1999), de lado 10m, espesor constante entre 1m y 1×10^{-4} m, módulo de elasticidad de 20.15 kPa, relación de Poisson 0.3 y una carga puntual de 1kN en el centro de un enmallado de 2x2 se obtienen los siguientes resultados de análisis estático y dinámico.

Sap2000	Placa delgada		Placa gruesa	
Espesor (h)	$w \cdot h^3$	$T1 \cdot h$	$w \cdot h^3$	$T1 \cdot h$
1	1.195	60.891	1.138	56.721
0.1	1.195	60.891	1.061	53.926
0.01	1.195	60.891	1.060	53.898
0.001	1.195	60.891	1.060	53.898
0.0001	1.195	60.891	1.060	53.898

4. PLACAS

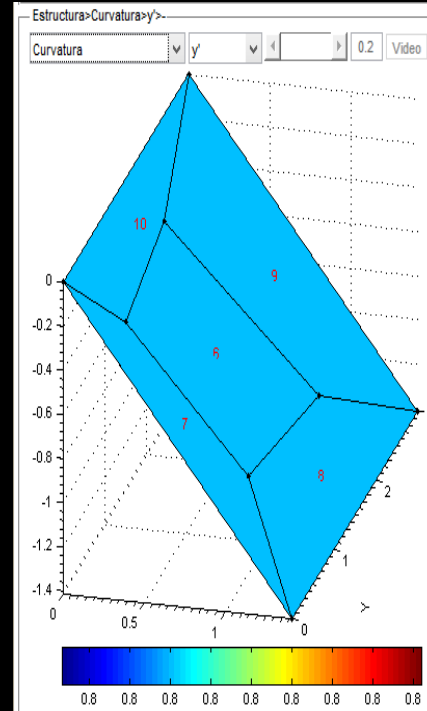
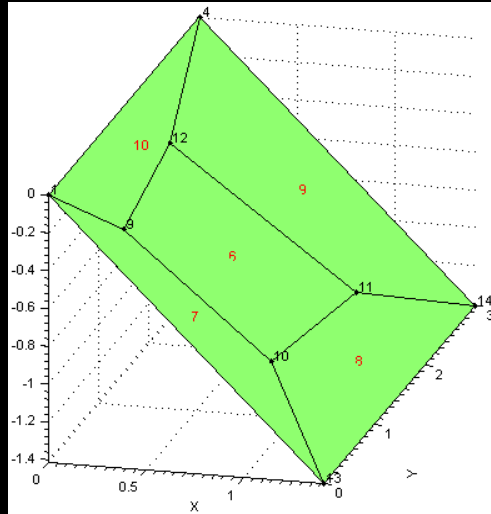
Placa con carga puntual al centro



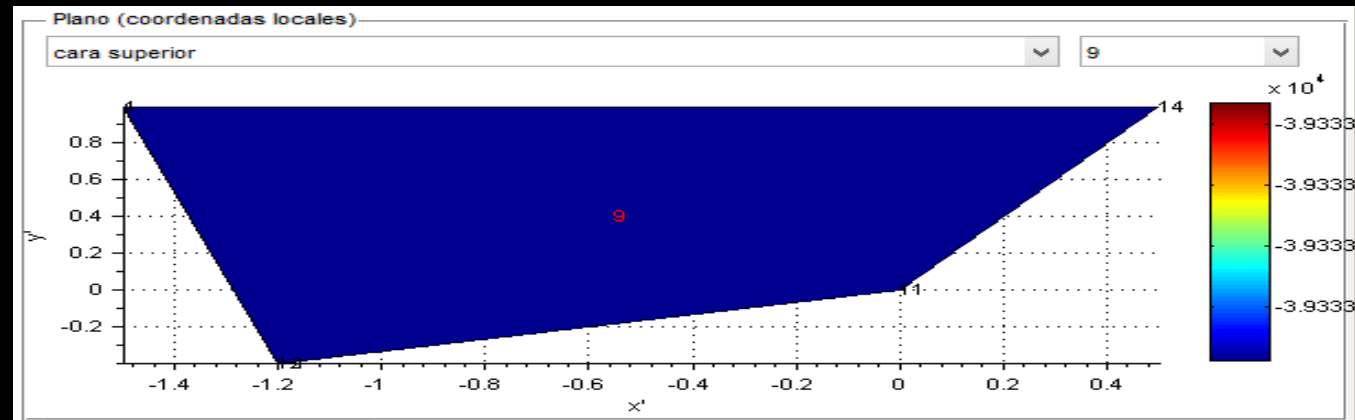
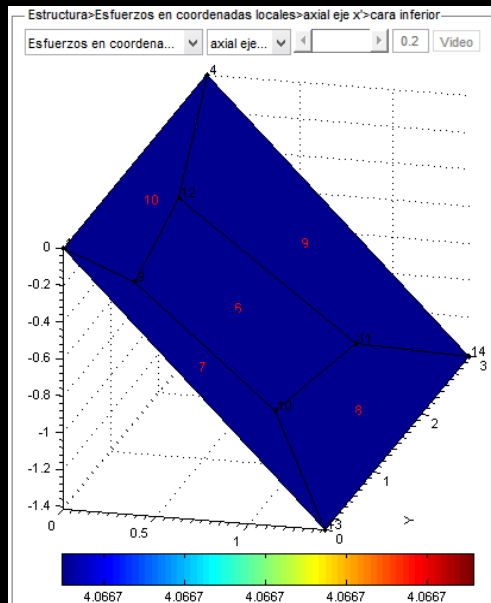
Utilizando unas placas cuadradas, presentada previamente por (Wilson E. L., 1999), de lado 10m, espesor constante entre 1m y 1×10^{-4} m, módulo de elasticidad de 20.15 kPa, relación de Poisson 0.3 y cargas puntuales equivalentes a una carga distribuida de 1 kN/m^2 , podemos obtener los siguientes resultados:

$w \cdot h^3$	Placa delgada		Placa gruesa	
	SAP	FEM-e2D	SAP	FEM-e2D
h				
1	48.373	48.373	43.138	44.693
0.1	48.373	48.373	39.306	40.861
0.01	48.373	48.373	39.267	40.823
0.001	48.370	48.373	39.270	40.822
0.0001	48.370	48.373	39.270	40.822

5. CÁSCARAS

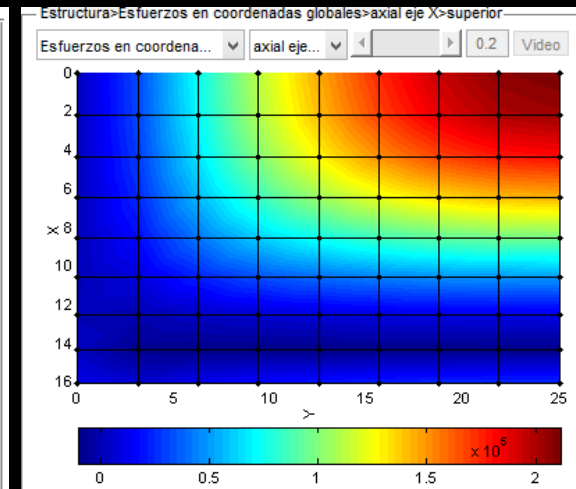
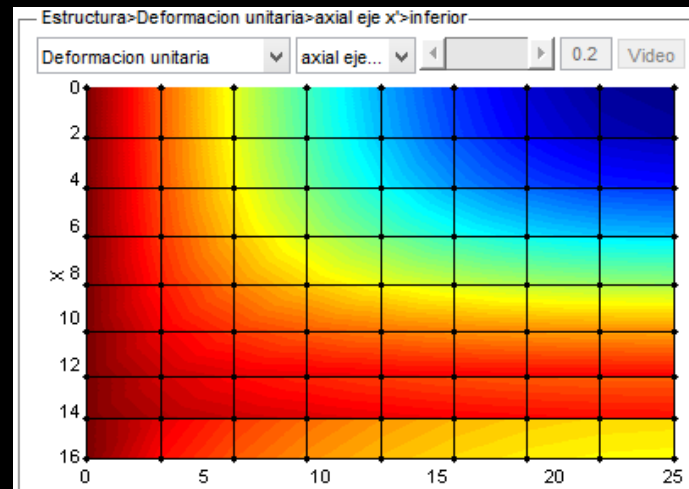
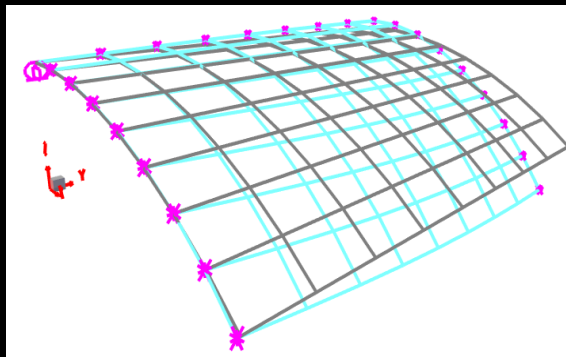
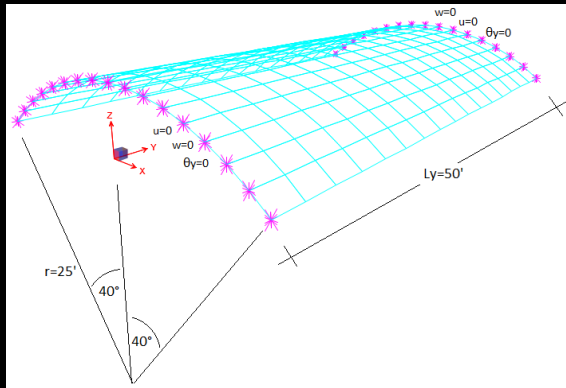
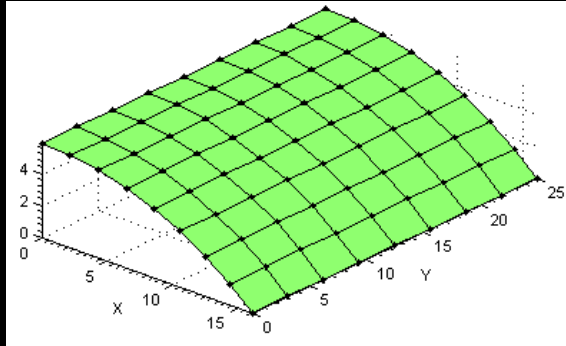


Utilizando la estructura de las anteriores pruebas de la Parcela, para evaluar la Cáscara Delgada y la Cáscara Gruesa, en esta ocasión se ha rotado $+45^\circ$ en el eje y' , se usaron las cargas de membrana y de placa simultáneamente, produciendo los mismos resultados esperados en esfuerzos constantes axiales x' de 39.333,33 Y 40.666,66 kPa en la fibra superior e inferior respectivamente, una curvatura de rotación al eje y' constante por acción de la carga de placa de 0.8.

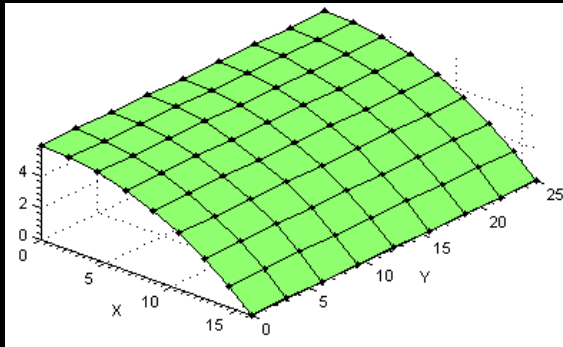


5. CÁSCARAS

Este es un problema presentado en (Scordelis & Lo, 1964) y utilizado por (Wilson E. L., 1999), es usado aquí para comparar los resultados entre FEM-e2D y Sap2000; se trata de una cubierta con el plano XY curvado de radio 25', longitud en el eje Y de 50', un ángulo total de la zona curvada de 80° , espesor 0.25', módulo de elasticidad de 4.32×10^8 lb/pie², relación de Poisson de 0 y peso unitario de 360 lb/pie³; aprovechando la simetría del problema se modela la cuarta parte de toda la cubierta.



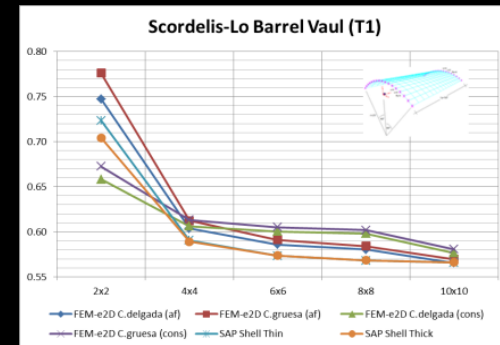
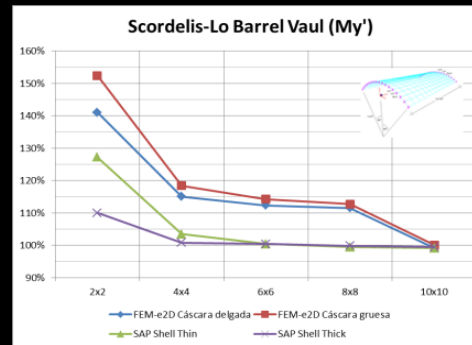
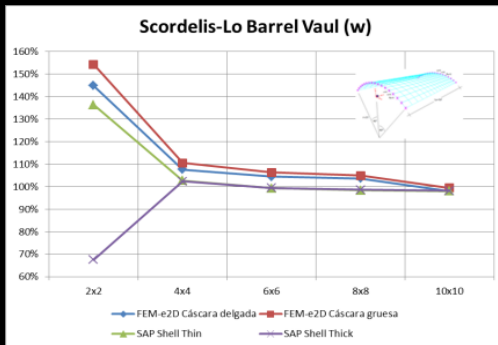
5. CÁSCARAS



mallá	SAP Shell Thin	SAP Shell Thick
2x2	136%	68%
4x4	103%	102%
6x6	99%	100%
8x8	98%	99%
10x10	98%	98%

MF (y') min(neg)	SAP Shell Thin	SAP Shell Thick
2x2	127%	110%
4x4	103%	101%
6x6	100%	100%
8x8	99%	100%
10x10	99%	99%

T1 (s)	SAP Shell Thin	SAP Shell Thick
2x2	0.72	0.70
4x4	0.59	0.59
6x6	0.57	0.57
8x8	0.57	0.57
10x10	0.57	0.57



Gracias

Créditos a:

<https://openai.com/dall-e-2> - <https://aminoapps.com/> - <https://miprofe.com/> - <https://www.youtube.com/@EASYCTE> -

Michel Bolaños Guerrero, Ing. C., Esp., Mag.
Candidato a Doctor en Ingeniería – Énfasis en Mecánica de Sólidos



Facultad de Ingeniería - Especialización en Estructuras

<https://michel.udenar.edu.co/> - michel@udenar.edu.co

Universidad de Nariño

[ini](#) [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [fin](#)