

ESPECIALIZACIÓN EN ESTRUCTURAS ANÁLISIS ESTRUCTURAL AVANZADO

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS INTRODUCCIÓN

Michel Bolaños Guerrero,

Ing. Civil, Especialista en Estructuras,
Magister en Ingeniería – Énfasis en Ingeniería Civil,
Candidato a Doctor en Ingeniería – Énfasis en Mecánica de Sólidos

2023-B

Facultad de Ingeniería - Especialización en Estructuras

<https://michel.udenar.edu.co/> - michel@udenar.edu.co

Universidad de Nariño



INTRODUCCIÓN AL MEF

1. Histórico.
2. Fuerzas y equilibrio.
3. Esfuerzo-deformación espacial.
4. Modelos planos.
5. Aproximación de la solución.



1. HISTÓRICO

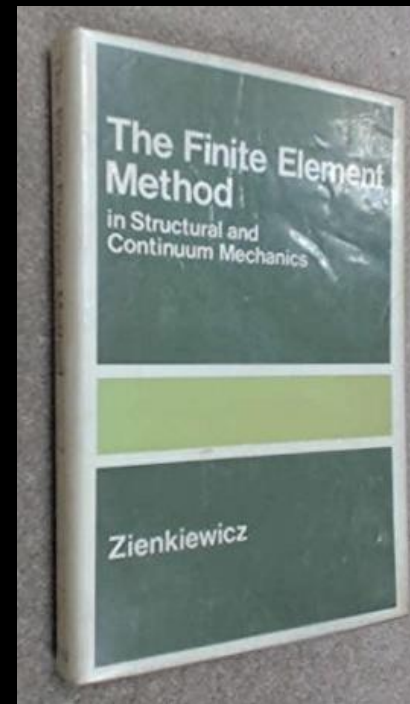
- 1941 y 1943 en estructuras de aeronaves basada en interpolación polinómica sobre subregiones triangulares para modelar torsión.
- 1955 publicación del *Energy Theorems and Structural Analysis*
- 1956 matrices de rigidez para cercas y vigas.
- 1960 inicia el término ELEMENTO FINITO.
- 1967 *The Finite Element Method*, Zienkiewicz & Cheung
- ...

ENERGY THEOREMS AND STRUCTURAL ANALYSIS

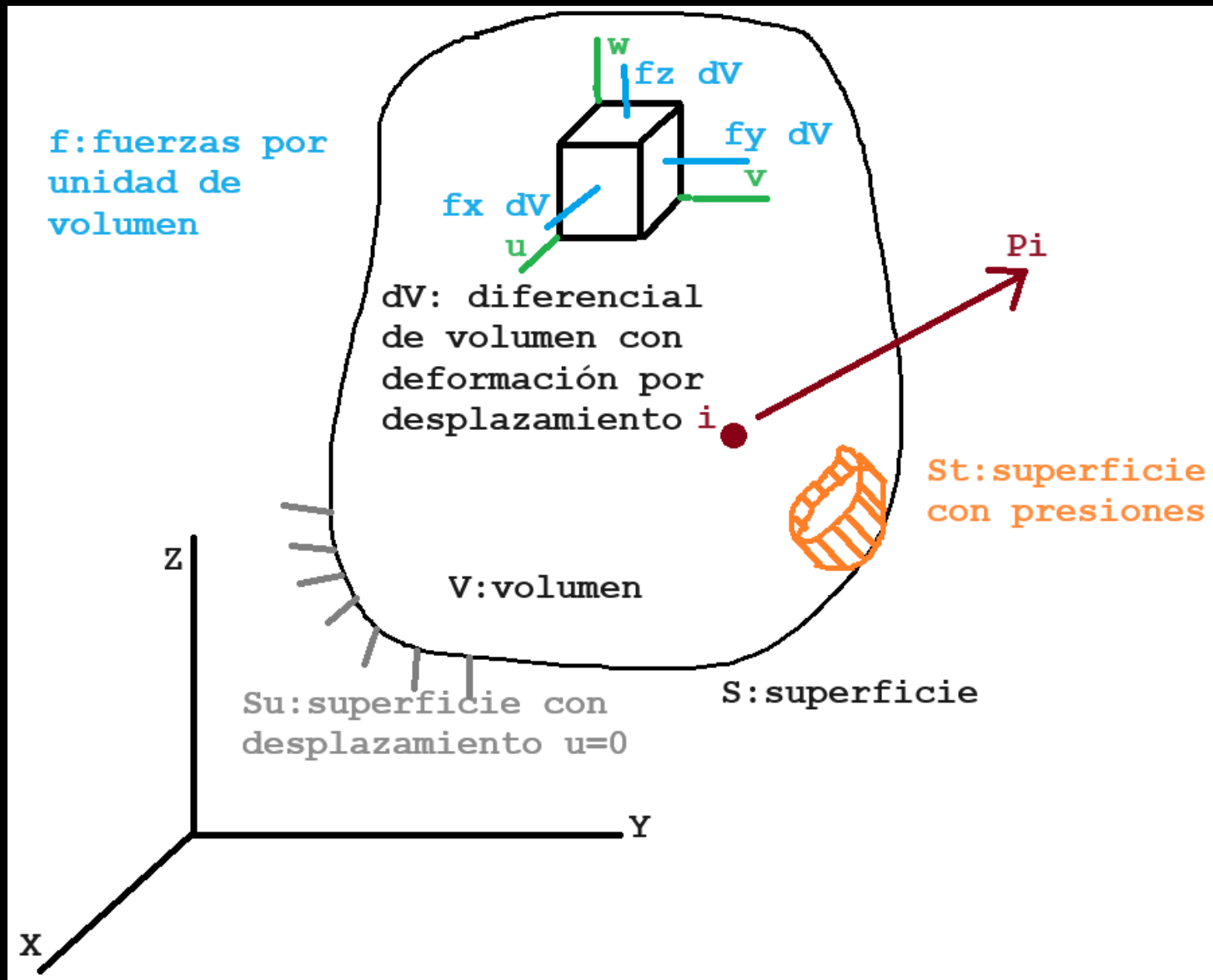
A Generalised Discourse with Applications on Energy Principles of Structural Analysis Including the Effects of Temperature and Non-Linear Stress-Strain Relations.

by
J. H. ARGYRIS, D.Sc. (Eng)
*Professor of Aeronautical Structures,
University of London,
Imperial College of Science and Technology*

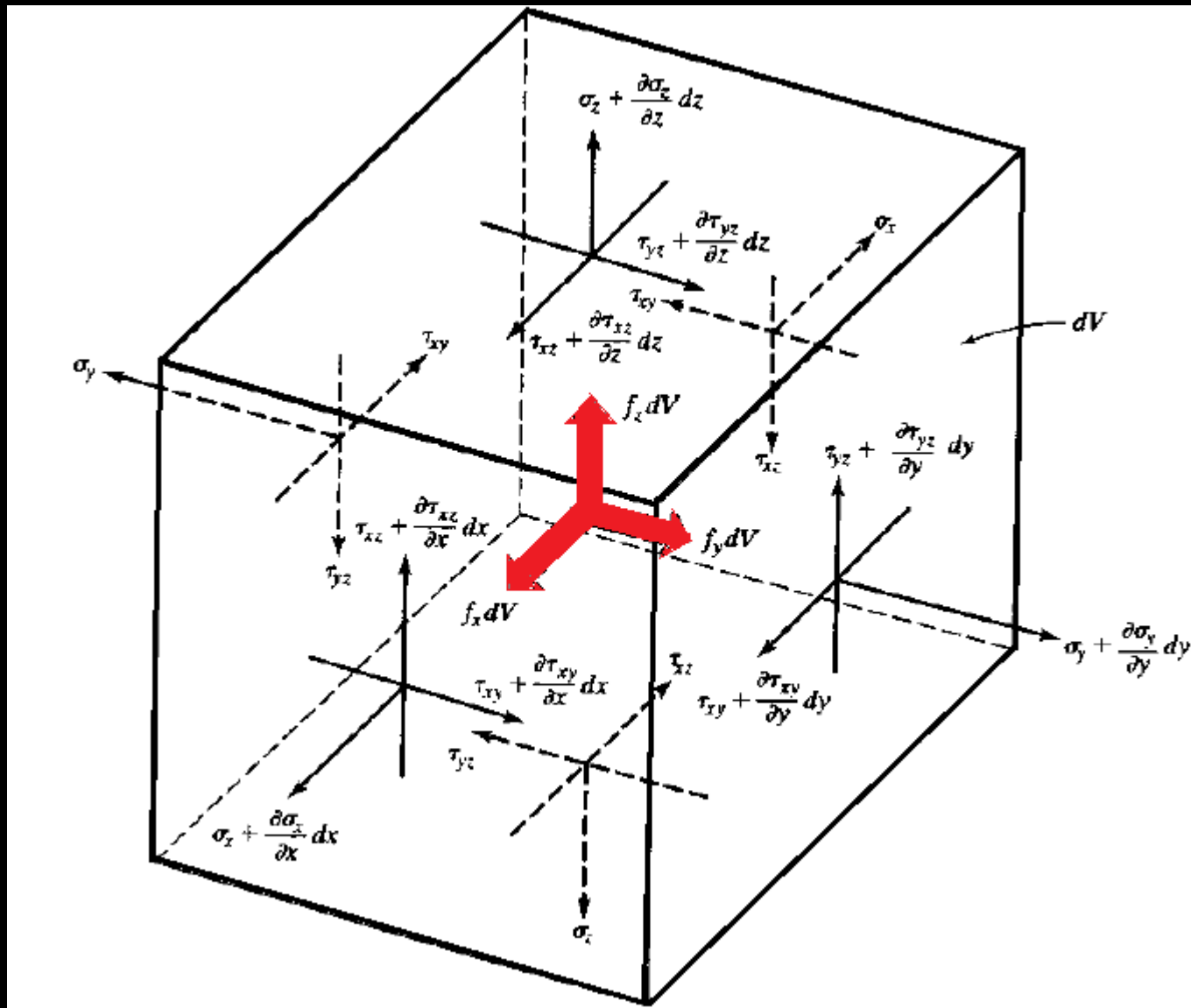
Co-author of Part II
S. KELSEY, B.Sc. (Eng)
*Lecturer in Aeronautical Structures,
Imperial College of Science and Technology*



2. ESFUERZOS Y EQUILIBRIO



2. ESFUERZOS Y EQUILIBRIO



3. ESFUERZO-DEFORMACIÓN 3D

1D: $\sigma = E\epsilon$

3D: $\sigma = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{xy}\}^T$

$$\epsilon = \{\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \quad \gamma_{xy}\}^T$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$$

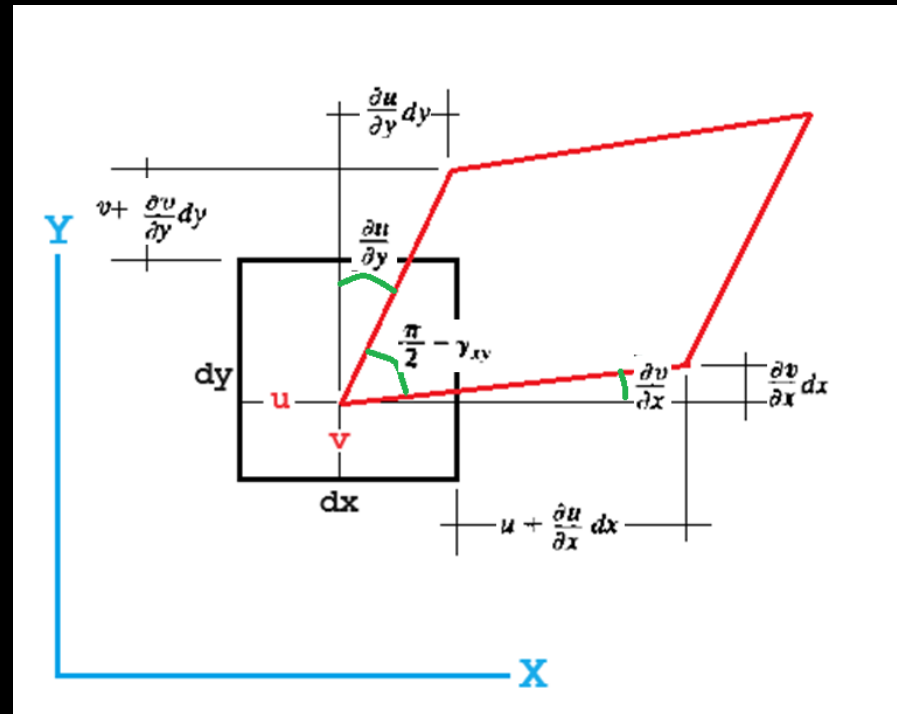
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0$$



3. ESFUERZO-DEFORMACIÓN 3D

1D: $\sigma = E\epsilon$

3D: $\epsilon = \{\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \quad \gamma_{xy}\}^T$



$$\epsilon = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\}^T$$

3. ESFUERZO-DEFORMACIÓN 3D

$$3D : \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{2(1 + \nu)}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

3. ESFUERZO-DEFORMACIÓN 3D

3D :

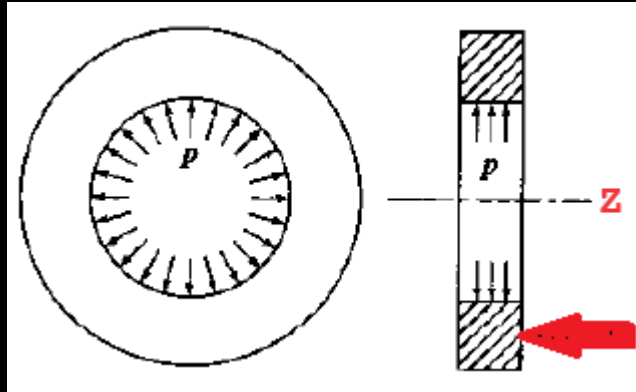
$$\sigma = D \epsilon$$

$$D = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - \nu)}$$



4. MODELOS PLANOS

Esfuerzo plano:

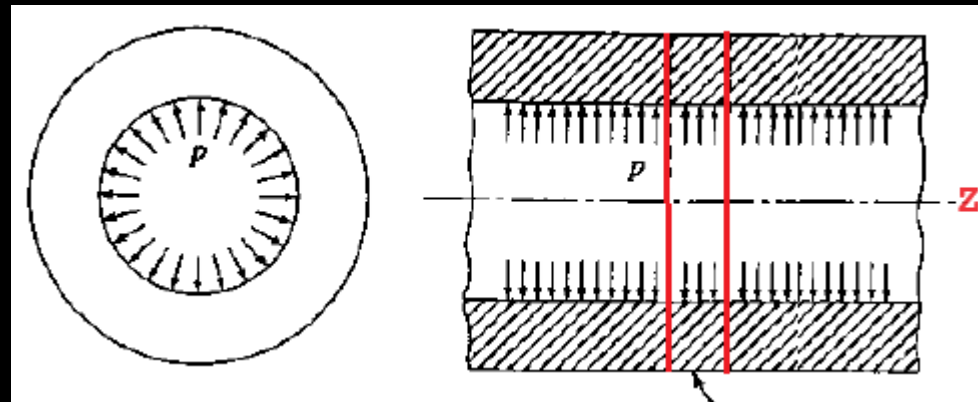


$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_{zx} = 0$$

$$\tau_{yz} = 0$$

Deformación plana:



$$\epsilon_z = 0$$


$$\gamma_{zx} = 0$$

$$\gamma_{yz} = 0$$

4. MODELOS PLANOS


Esfuerzo
plano:

$$\sigma = D\epsilon$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\text{img} \right] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$


Deformación
plana:

$$\sigma = D\epsilon$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left[\text{img} \right] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$


5. APROXIMACIÓN DE LA SOLUCIÓN

Energía potencial (Π):

$\Pi = \text{Energía de deformación}(U) + \text{trabajo potencial}(WP)$

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma^T \epsilon) dV$$

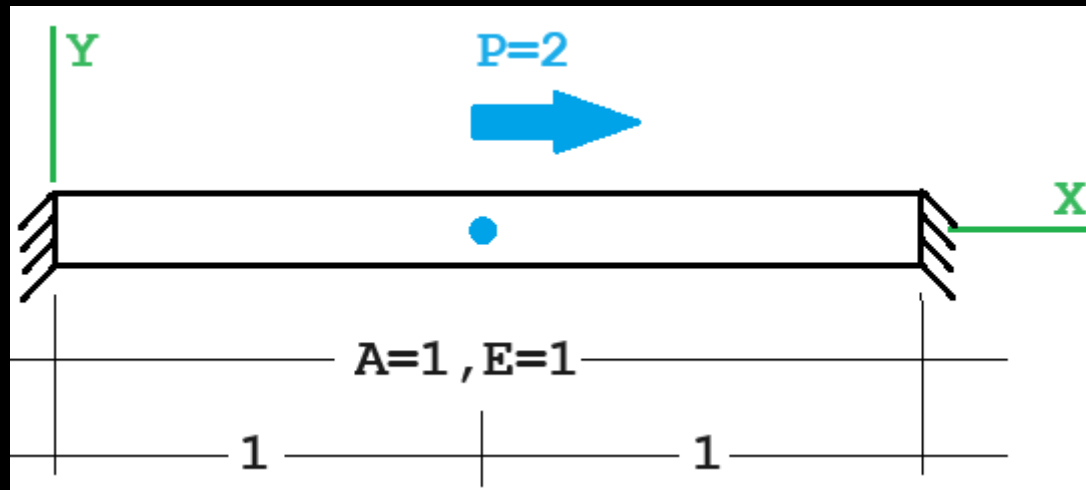
$$WP = - \left(\int_V (u^T \epsilon) dV + \int_S (u^T T) dS + \sum_i (u_i^T P_i) \right)$$

Minimización de la energía potencial:

En sistemas conservativos, de todos los campos de desplazamientos cinemáticamente admisibles, aquellos correspondientes al equilibrio, extreman el total de la energía potencial. Si el punto extremo es una condición mínima, el estado de equilibrio es estable.



5. APROXIMACIÓN DE LA SOLUCIÓN



$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left(EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right) dx - 2u_1$$

$$u_1 = u(x = 1)$$

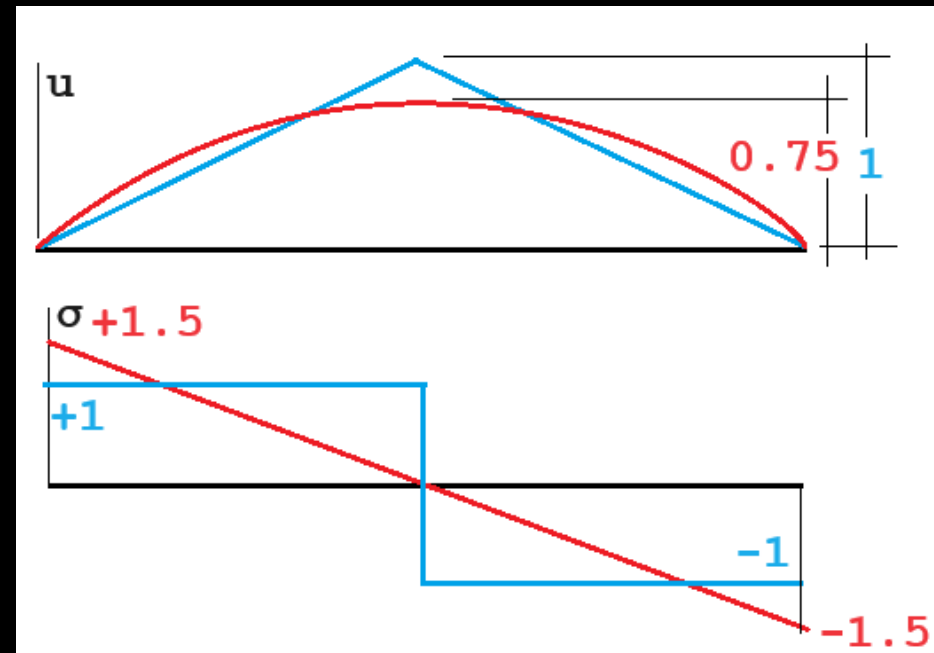
$$u = a_1 + a_2x + a_3x^2$$

$$u(x = 0) = 0$$

$$u(x = 2) = 0$$

$$a_1 = ?, a_2 = ?, a_3 = ?$$

$$u = ?$$



Gracias

Créditos a:

<https://openai.com/dall-e-2> - <https://aminoapps.com/> - <https://miprofe.com/> - <https://www.youtube.com/@EASYCTE> -

Michel Bolaños Guerrero, Ing. C., Esp., Mag.
Candidato a Doctor en Ingeniería – Énfasis en Mecánica de Sólidos



Facultad de Ingeniería - Especialización en Estructuras

<https://michel.udenar.edu.co/> - michel@udenar.edu.co

Universidad de Nariño

[ini](#) [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [fin](#)