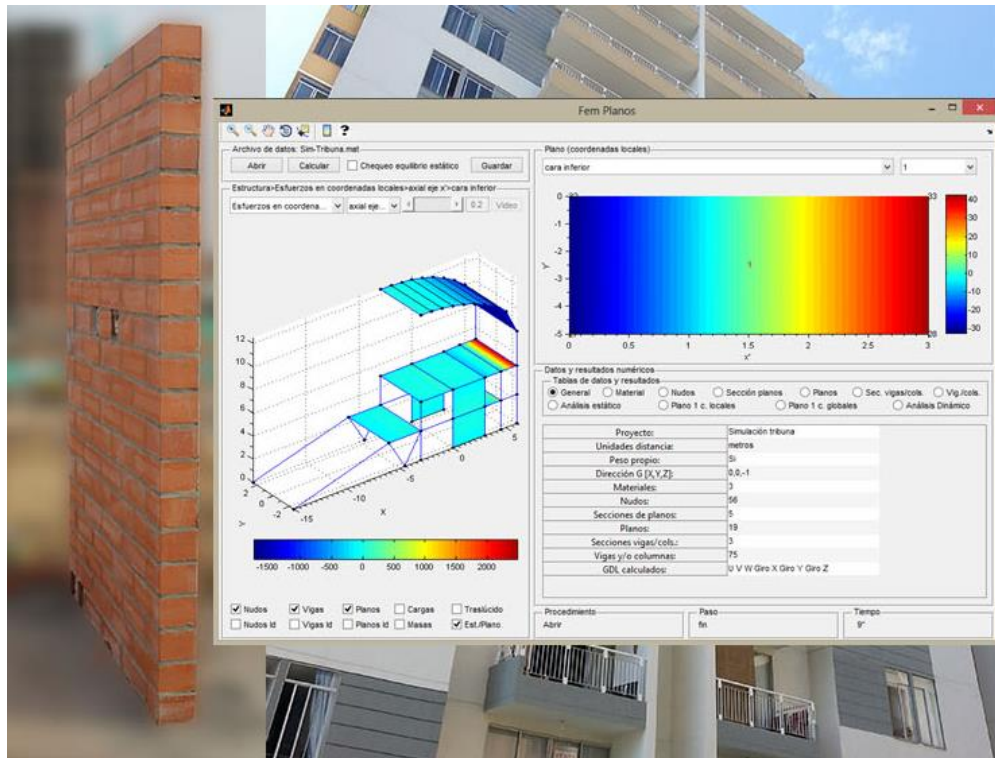


DESARROLLO COMPUTACIONAL DE ELEMENTOS PLANOS PARA EL TOOLBOX DE ELEMENTOS FINITOS FEM DE MATLAB

F E M – e 2 D



MICHEL BOLAÑOS GUERRERO

Escuela de Ingeniería Civil y Geomática
Universidad del Valle
Santiago de Cali
Octubre 15 de 2014

**DESARROLLO COMPUTACIONAL DE ELEMENTOS PLANOS PARA EL TOOLBOX
DE ELEMENTOS FINITOS FEM DE MATLAB**

F E M – e 2 D

MICHEL BOLAÑOS GUERRERO

Trabajo para optar por el título de
Maestría en Ingeniería, Énfasis en Ingeniería Civil, Orientación en Estructuras

Directores

ING. JOHANNIO MARULANDA CASAS Ph. D.

ING. PETER THOMSON, Ph. D.

Escuela de Ingeniería Civil y Geomática
Universidad del Valle
Santiago de Cali
Octubre 15 de 2014

CONTENIDO BREVE

| | |
|----------------------------------|-----|
| Nota de aceptación | iii |
| <i>AGRADECIMIENTOS</i> | iv |
| <i>DEDICATORIA</i> | v |
| CONTENIDO BREVE..... | vi |
| CONTENIDO | vii |
| LISTADO DE ILUSTRACIONES | x |
| LISTADO DE ECUACIONES..... | xii |
| LISTADO DE TABLAS..... | xiv |
| RESUMEN | 16 |
| <i>ABSTRACT</i> | 17 |
| INTRODUCCIÓN | 18 |
| 1 SOPORTE TEÓRICO | 20 |
| 2 FLUJO GENERAL | 45 |
| 3 VALIDACIÓN | 47 |
| 4 CONCLUSIONES | 67 |
| 5 RECOMENDACIONES | 68 |
| 6 REFERENCIAS | 69 |
| ANEXOS | 72 |
| A MANUAL DE USUARIO | A-1 |
| B CODIFICACIÓN | B-1 |

CONTENIDO

| | |
|---|-----|
| Nota de aceptación | iii |
| <i>AGRADECIMIENTOS</i> | iv |
| <i>DEDICATORIA</i> | v |
| CONTENIDO BREVE..... | vi |
| CONTENIDO | vii |
| LISTADO DE ILUSTRACIONES | x |
| LISTADO DE ECUACIONES..... | xii |
| LISTADO DE TABLAS..... | xiv |
| RESUMEN | 16 |
| <i>ABSTRACT</i> | 17 |
| INTRODUCCIÓN | 18 |
| 1 SOPORTE TEÓRICO | 20 |
| 1.1 FEM Unidimensional..... | 20 |
| 1.2 Código Abierto..... | 21 |
| 1.3 El Método de Elementos Finitos..... | 22 |
| 1.3.1 Método de Rayleigh-Ritz | 23 |
| 1.3.2 Aplicación en deformación axial pura y resortes..... | 25 |
| 1.3.3 Funciones de forma | 26 |
| 1.3.4 Deducción general de la matriz de rigidez..... | 27 |
| 1.3.5 Integración numérica..... | 28 |
| 1.3.6 Elementos Isoparamétricos | 28 |
| 1.3.7 Prueba de convergencia o Prueba de la Parcela | 28 |
| 1.4 Formulación del material..... | 29 |
| 1.4.1 Material para esfuerzo plano | 30 |
| 1.4.2 Material para deformación unitaria plana | 30 |
| 1.5 Sistemas de coordenadas | 30 |
| 1.6 Matriz Jacobiana | 32 |
| 1.7 Modelos desarrollados | 32 |
| 1.7.1 Esfuerzo Plano | 32 |
| 1.7.2 Deformación Unitaria Plana | 33 |
| 1.7.2.1 Matriz de rigidez para esfuerzo plano y deformación unitaria plana..... | 33 |
| 1.7.3 Esfuerzo Plano y Deformación Unitaria Plana con modos incompatibles | 34 |
| 1.7.4 Membrana | 34 |
| 1.7.5 Placa Gruesa | 36 |
| 1.7.6 Placa Delgada..... | 39 |
| 1.7.7 Cáscara Gruesa | 40 |
| 1.7.8 Cáscara Delgada..... | 41 |
| 1.8 Condensación Estática | 41 |
| 1.9 Modificación modos incompatibles método <i>b</i> (<i>b</i> barra)..... | 41 |
| 1.10 Análisis Estático | 42 |
| 1.11 Análisis dinámico | 43 |
| 2 FLUJO GENERAL | 45 |
| 3 VALIDACIÓN | 47 |
| 3.1 Esfuerzo Plano | 47 |
| 3.1.1 Prueba de la Parcela | 47 |
| 3.1.2 Viga modelada con malla distorsionada A..... | 48 |
| 3.2 Deformación Unitaria Plana | 49 |
| 3.2.1 Prueba de la Parcela | 49 |

| | | |
|---------------------|---|------|
| 3.2.2 | Sección de una presa | 49 |
| 3.3 | Esfuerzo Plano y Deformación Unitaria Plana incompatibles | 50 |
| 3.3.1 | Prueba de la Parcela | 50 |
| 3.3.2 | Viga modelada con malla distorsionada A..... | 50 |
| 3.4 | Membrana | 51 |
| 3.4.1 | Prueba de la Parcela | 51 |
| 3.4.2 | Prueba de la Parcela de Tylor | 51 |
| 3.4.3 | Viga modelada con malla distorsionada A..... | 52 |
| 3.4.4 | Viga modelada con malla distorsionada B..... | 53 |
| 3.4.5 | Viga corta en voladizo | 54 |
| 3.4.6 | <i>Cook's Membrane</i> | 56 |
| 3.5 | Placas | 57 |
| 3.5.1 | Prueba de la Parcela | 57 |
| 3.5.2 | Viga modelada como placa..... | 60 |
| 3.5.3 | Placa con carga puntual al centro..... | 61 |
| 3.5.4 | Placa simplemente apoyada con carga distribuida | 62 |
| 3.6 | Cáscaras | 62 |
| 3.6.1 | Prueba de la Parcela | 62 |
| 3.6.2 | Scordelis-Lo Barrel Vault..... | 63 |
| 4 | CONCLUSIONES | 67 |
| 5 | RECOMENDACIONES | 68 |
| 6 | REFERENCIAS | 69 |
| ANEXOS | | 72 |
| A | MANUAL DE USUARIO | A-1 |
| A.1 | Introducción | A-1 |
| A.2 | Iniciar el programa | A-1 |
| A.3 | Interfaz Gráfica de Usuario | A-2 |
| A.4 | Creación de la estructura | A-7 |
| A.4.1 | Formato de datos de entrada | A-8 |
| A.4.2 | Abrir una estructura | A-10 |
| A.4.2.1 | Microsoft Excel | A-11 |
| A.4.2.2 | Sap2000 y otros programas | A-12 |
| A.4.2.3 | Archivos *.csv | A-12 |
| A.5 | Calcular una estructura | A-13 |
| A.6 | Guardar una estructura | A-15 |
| A.7 | Estructura de las variables | A-16 |
| A.8 | Presentación de gráficos | A-23 |
| B | CODIFICACIÓN | B-1 |
| B.1 | FEMe2D.m | B-1 |
| B.2 | LeeExcel.m | B-29 |
| B.3 | FemLineal.m | B-34 |
| B.4 | BorrarTablas.m | B-38 |
| B.5 | BorrarTablas.m | B-39 |
| B.6 | Generales.m | B-39 |
| B.7 | EstDeDatos.m | B-40 |
| B.8 | EjesLocalesPlacas.m..... | B-45 |
| B.9 | CosenosDirectores.m..... | B-46 |
| B.10 | CoordLocalesPlano.m | B-46 |
| B.11 | ActualiceObj.m | B-47 |
| B.12 | Calcular.m | B-50 |

| | | |
|------|-----------------------------|------|
| B.13 | FFgenerales.m | B-52 |
| B.14 | ElementoMaestro.m..... | B-53 |
| B.15 | LadosCuadrilatero.m | B-54 |
| B.16 | AreaCuadrilatero.m | B-54 |
| B.17 | CgAferencia.m | B-55 |
| B.18 | MatrizD.m..... | B-55 |
| B.19 | Klocales.m..... | B-56 |
| B.20 | GDLeestructura.m | B-59 |
| B.21 | PesoPropio.m | B-63 |
| B.22 | MlocalesA.m | B-63 |
| B.23 | MlocalesC.m | B-64 |
| B.24 | Local2Global_est.m | B-65 |
| B.25 | Local2Global_din.m | B-66 |
| B.26 | Ensamblaje.m | B-66 |
| B.27 | SolucionEstatica.m..... | B-67 |
| B.28 | OkEstatico.m..... | B-70 |
| B.29 | SolucionDinamica.m | B-73 |
| B.30 | BorreVarTemp.m | B-76 |
| B.31 | UserDataEnGuiPlanos.m..... | B-77 |
| B.32 | Grafico.m | B-77 |
| B.33 | EscribirExcel.m..... | B-86 |
| B.34 | ActualiceObjArchivo.m | B-90 |

LISTADO DE ILUSTRACIONES

| | |
|---|----|
| Ilustración 1-1 Viaducto Pereira-Dosquebradas..... | 20 |
| Ilustración 1-2 Puente atirantado Bill Emerson Memorial | 20 |
| Ilustración 1-3 Aspecto interfaz gráfica FEM con ingreso de datos | 21 |
| Ilustración 1-4 Aspecto interfaz gráfica FEM con salida de datos | 21 |
| Ilustración 1-5 Cuerpo de trabajo tridimensional | 24 |
| Ilustración 1-6 F.F. estándar bilineal para esquina | 26 |
| Ilustración 1-7 F.F. cuadráticas para punto medio del lado | 27 |
| Ilustración 1-8 F.F. Cuadrática para nodo central | 27 |
| Ilustración 1-9 F.F. cúbica para tangente punto medio del lado | 27 |
| Ilustración 1-10 Ejes globales de coordenadas | 31 |
| Ilustración 1-11 Ejes locales de coordenadas de un plano..... | 31 |
| Ilustración 1-12 Sistema de Coordenadas locales y naturales | 31 |
| Ilustración 1-13 Sistemas de coordenadas cuadrilátero | 32 |
| Ilustración 1-14 Rotación gdl nodos medios de membrana | 35 |
| Ilustración 1-15 Distribución parabólica lados de membrana..... | 35 |
| Ilustración 1-16 Modo de deformación indeseado para membrana | 36 |
| Ilustración 1-17 Desplazamiento en el espesor de una Placa | 37 |
| Ilustración 1-18 Esquema deformación Placa Gruesa | 37 |
| Ilustración 1-19 Rotación giros nodos medios para placas | 38 |
| Ilustración 1-20 Deformación cúbica de un lado de una Placa | 38 |
| Ilustración 1-21 Deformación angular en nodos de Placas | 39 |
| Ilustración 1-22 Gdl de una Cáscara | 40 |
| Ilustración 3-1 Prueba de la Parcela –estática- para Esfuerzo Plano | 48 |
| Ilustración 3-2 Prueba de la Parcela –dinámica- para Esfuerzo Plano | 48 |
| Ilustración 3-3 Viga Distorsionada A..... | 49 |
| Ilustración 3-4 Sección de una Presa..... | 50 |
| Ilustración 3-5 Prueba de la Parcela de Tylor | 51 |
| Ilustración 3-6 Viga Distorsionada A con caso de carga de momento | 52 |
| Ilustración 3-7 Viga distorsionada A para Membrana | 53 |
| Ilustración 3-8 Viga simplemente apoyada | 53 |
| Ilustración 3-9 Deformación viga simplemente apoyada modelada con FEM-e2D | 53 |
| Ilustración 3-10 Viga corta en voladizo | 54 |
| Ilustración 3-11 Comportamiento Membrana en viga corta..... | 55 |
| Ilustración 3-12 Cook's Membrane | 56 |
| Ilustración 3-13 <i>Cook's Membrane</i> | 57 |
| Ilustración 3-14 Prueba de la parcela para Placa –general- | 58 |
| Ilustración 3-15 Momentos flectores en la Prueba de la Parcela para Placa | 58 |
| Ilustración 3-16 Esfuerzos en la Prueba de la Parcela para Placa..... | 59 |
| Ilustración 3-17 Prueba de la Parcela a Placa en Sap2000 | 59 |
| Ilustración 3-18 Viga en voladizo con un elemento | 60 |
| Ilustración 3-19 Placa con carga puntual al centro | 61 |
| Ilustración 3-20 Geometría y curvatura en Prueba de la Parcela para Cáscaras..... | 62 |
| Ilustración 3-21 Esfuerzos en Prueba de la Parcela para Cáscaras..... | 63 |
| Ilustración 3-22 Scordelis-Lo Barrel vault - Geometría..... | 63 |
| Ilustración 3-23 Scordelis-Lo Barrel vault - General y deformación | 64 |
| Ilustración 3-24 Scordelis-Lo Barrel Vault - Esfuerzos | 64 |
| Ilustración 3-25 Scordelis-Lo Barrel Vault - Momentos..... | 64 |
| Ilustración 3-25 Scordelis-Lo Barrel Vault - Cortantes..... | 65 |

| | |
|--|------|
| Ilustración 3-26 Compración modelos en Scordelis-Lo Barrel Vault..... | 66 |
| Ilustración A-1 Comando cd de Matlab | A-2 |
| Ilustración A-2 Lista desplegable de directorios en Matlab | A-2 |
| Ilustración A-3 Ejecución de FEMe2D desde el Command Window | A-2 |
| Ilustración A-4 Interfaz gráfica de usuario –IGU- | A-3 |
| Ilustración A-5 Opciones de tabla de datos..... | A-5 |
| Ilustración A-6 Abrir un archivo de datos..... | A-10 |
| Ilustración A-7 Ventana para abrir un archivo de datos..... | A-11 |
| Ilustración A-8 Exportación a Microsoft Excel desde Sap2000..... | A-12 |
| Ilustración A-9 Editor de texto con archivo *.csv | A-13 |
| Ilustración A-10 Botón de cálculo de una estructura | A-13 |
| Ilustración A-11 Avance de procedimientos Abrir, Calcular y Guardar | A-13 |
| Ilustración A-12 Chequeo equilibrio estático | A-13 |
| Ilustración A-13 Resultados del chequeo de equilibrio estático | A-14 |
| Ilustración A-14 Uso del botón Cursor de datos..... | A-14 |
| Ilustración A-15 Selección de tablas de resultados | A-14 |
| Ilustración A-16 Botón Guardar una estructura | A-15 |
| Ilustración A-17 Ventana para guardar estructura | A-15 |
| Ilustración A-18 Hojas creadas al guardar con formatos *.xlsx y *.xls..... | A-16 |
| Ilustración A-19 Uso de instrucción load..... | A-16 |
| Ilustración A-20 Estructura de datos en archivo *.mat desde el Workspace | A-17 |
| Ilustración A-21 Presentación de planos | A-23 |
| Ilustración A-22 Vigas y traslucidez de planos..... | A-24 |
| Ilustración A-23 Selección de un plano | A-24 |
| Ilustración A-24 Presentación estructura total o plano seleccionado..... | A-24 |
| Ilustración A-25 Datos plano seleccionado | A-25 |

LISTADO DE ECUACIONES

| | |
|---|----|
| Ecuación 1 Minimización de la energía potencial total (Chandrupatla & Belegundu, 1999) | 23 |
| Ecuación 2 Energía potencial total | 23 |
| Ecuación 3 Energía de deformación unitaria por unidad de volumen | 23 |
| Ecuación 4 Energía de deformación unitaria..... | 23 |
| Ecuación 5 Potencial de trabajo | 23 |
| Ecuación 6 Expresión matricial general | 24 |
| Ecuación 7 Esfuerzo y deformación unitaria axiales | 25 |
| Ecuación 8 Fuerza y deformación axial pura | 25 |
| Ecuación 9 Energía de deformación unitaria para deformación axial pura | 25 |
| Ecuación 10 Energía de deformación unitaria para resortes | 25 |
| Ecuación 11 Potencial de trabajo para esfuerzo axial puro y cargas unicamente en los extremos de barras y resortes..... | 25 |
| Ecuación 12 Energía de deformación unitaria para un sistema discreto | 26 |
| Ecuación 13 Potencial de trabajo para un sistema discreto..... | 26 |
| Ecuación 14 Energía de deformación unitaria para un resorte j | 26 |
| Ecuación 15 Potencial de trabajo para esfuerzo axial puro y cargas unicamente en los extremos de una barra j o un resorte j | 26 |
| Ecuación 16 F.F. estándar bilineal para esquinas | 26 |
| Ecuación 17 F.F. cuadráticas para punto medio del lado | 26 |
| Ecuación 18 F.F. cuadrática para nodo central..... | 26 |
| Ecuación 19 F.F. cúbica para tangente punto medio del lado..... | 26 |
| Ecuación 20 Esfuerzos generales..... | 27 |
| Ecuación 21 Interpolación del campos de desplazamiento | 27 |
| Ecuación 22 Deformaciones unitarias generales..... | 27 |
| Ecuación 23 Energía de deformación unitaria con matrices | 27 |
| Ecuación 24 Matriz de rigidez general..... | 27 |
| Ecuación 25 Aproximación deformación con modos compatibles..... | 28 |
| Ecuación 26 Formulación elemento isoparamétrico | 28 |
| Ecuación 27 Módulo de cortante | 29 |
| Ecuación 28 Deformaciones unitarias - Esfuerzos..... | 29 |
| Ecuación 29 Esfuerzos y deformaciones..... | 29 |
| Ecuación 30 Matriz constitutiva del material | 30 |
| Ecuación 31 Matriz constitutiva para Esfuerzo Plano | 30 |
| Ecuación 32 Matriz constitutiva para Deformación Unitaria Plana..... | 30 |
| Ecuación 33 Derivación implícita de una función..... | 32 |
| Ecuación 34 Matriz Jacobiana [J]..... | 32 |
| Ecuación 35 Deformación unitaria en z' para Esfuerzo Plano | 33 |
| Ecuación 36 Esfuerzo axial z' para Deformación Unitaria Plana..... | 33 |
| Ecuación 37 Matriz de deformación [B] | 33 |
| Ecuación 38 Matriz intermedia [A] | 34 |
| Ecuación 39 Matriz de derivadas del campo de desplazamiento en coordenadas naturales [G] | 34 |
| Ecuación 40 Matriz de rigidez general para un cuadrilátero isoparamétrico | 34 |
| Ecuación 41 Rotación de gdl nodos medios en Membranas..... | 35 |
| Ecuación 42 Curva parabólica lados de membranas | 35 |
| Ecuación 43 Rotación absoluta de cuerpo rígido en membrana..... | 36 |
| Ecuación 44 Aproximación de giros en Placas..... | 37 |
| Ecuación 45 Rotación giros nodos medios para Placas | 38 |
| Ecuación 46 Aproximación deformación para un lado de Placas..... | 38 |

| | |
|--|----|
| Ecuación 47 Deformación por cortante lados de Placas Gruesas | 39 |
| Ecuación 48 Deformación angular en nodos de Placas | 39 |
| Ecuación 49 Suposición rotación lado de Placas Delgadas..... | 40 |
| Ecuación 50 Suposición desplazamiento lado de Placas Delgadas..... | 40 |
| Ecuación 51 Matriz K de Cáscaras | 41 |
| Ecuación 52 Condensación estática | 41 |
| Ecuación 53 Matriz de deformación..... | 42 |
| Ecuación 54 Modificación matriz de deformación | 42 |
| Ecuación 55 matricial global de la estructura..... | 42 |
| Ecuación 56 matricial global de la estructura restringida | 42 |
| Ecuación 57 Vector de deformación $\{Q_b\}$ | 42 |
| Ecuación 58 Cálculo de $\{R\}$ global..... | 43 |
| Ecuación 59 Vectores locales en coordenadas globales $\{R^e\}$ | 43 |
| Ecuación 60 Matriz de cosenos directores | 43 |
| Ecuación 61 Vectores $\{p^e\}$ y $\{q^e\}$ | 43 |
| Ecuación 62 Vectores locales en coordenadas globales $\{r^e\}$ | 43 |
| Ecuación 63 Ecuación característica de la estructura..... | 44 |

LISTADO DE TABLAS

| | |
|--|------|
| Tabla 3-1 Viga Distorsionada A para Esfuerzo Plano | 49 |
| Tabla 3-2 Viga distorsionada A para Esfuerzo Plano + modos incompatibles | 51 |
| Tabla 3-3 Viga distorsionada A para Membrana | 52 |
| Tabla 3-4 Comparativo Viga simplemente apoyada para membranas | 54 |
| Tabla 3-5 Deformación w en Cook's Membrane | 56 |
| Tabla 3-6 Deformación de giro en Cook's Membrane..... | 57 |
| Tabla 3-7 1er periodo de vibración en Cook's Membrane | 57 |
| Tabla 3-8 Viga modelada como placa..... | 60 |
| Tabla 3-9 Placa con carga puntual al centro calculada con Sap2000 | 61 |
| Tabla 3-10 Placa con carga puntual al centro calculada con FEM-e2D | 61 |
| Tabla 3-11 Placa con carga distribuida | 62 |
| Tabla 3-12 Deformación w para Scordelis-Lo Barrel Vault | 65 |
| Tabla 3-13 Momentos flectores para Scordelis-Lo Barrel Vault..... | 65 |
| Tabla 3-14 Periodo 1 para Scordelis-Lo Barrel Vault | 65 |
| Tabla A-1 Funciones en la barra de herramientas..... | A-3 |
| Tabla A-2 Funciones en la zona de manejo de archivos | A-4 |
| Tabla A-3 Funciones según tipo de gráfico | A-4 |
| Tabla A-4 Opciones del gráfico de deformación | A-4 |
| Tabla A-5 Funciones de presentación de elementos..... | A-5 |
| Tabla A-6 Presentación de tablas de datos FEM-e2D..... | A-6 |
| Tabla A-7 Tablas de datos FEM-e1D..... | A-6 |
| Tabla A-8 Presentación de tablas de resultados | A-7 |
| Tabla A-9 Información no editable | A-7 |
| Tabla A-10 Formato en general | A-8 |
| Tabla A-11 Formato materiales | A-8 |
| Tabla A-12 Formato nudos | A-8 |
| Tabla A-13 Formato coordenadas de los nudos | A-8 |
| Tabla A-14 Formato de restricciones en los nudos | A-8 |
| Tabla A-15 Formato cargas nodales | A-8 |
| Tabla A-16 Formato masas concentradas | A-9 |
| Tabla A-17 Formato secciones de planos | A-9 |
| Tabla A-18 Formato elementos planos | A-9 |
| Tabla A-19 Formato de los nudos de los planos..... | A-9 |
| Tabla A-20 Formato reacciones de empotramiento de planos | A-9 |
| Tabla A-21 Formato reacciones de empotramiento | A-9 |
| Tabla A-22 Formato secciones vigas/columnas..... | A-10 |
| Tabla A-23 Formato elementos vigas y/o columnas | A-10 |
| Tabla A-24 Formato datos generales..... | A-10 |
| Tabla A-25 Estructura de la variable Est..... | A-18 |
| Tabla A-26 Estructura de la variable Est.GDL | A-19 |
| Tabla A-27 Estructura de la variable Est.GDL.analizar | A-19 |
| Tabla A-28 Estructura de la variable Est.6nn..... | A-19 |
| Tabla A-29 Estructura de la variable FemL | A-19 |
| Tabla A-30 Estructura de la variable Material | A-20 |
| Tabla A-31 Estructura de la variable Nudos | A-20 |
| Tabla A-32 Estructura de la variable Plano..... | A-20 |
| Tabla A-33 Estructura de la variable SecPtipo..... | A-22 |
| Tabla A-34 Estructura de la variable SeccionP | A-22 |

| | |
|---|------|
| Tabla A-35 Estructura de la variable SeccionV | A-22 |
| Tabla A-36 Estructura de la variable Viga | A-22 |
| Tabla A-37 Estructura de la variable colDat | A-23 |

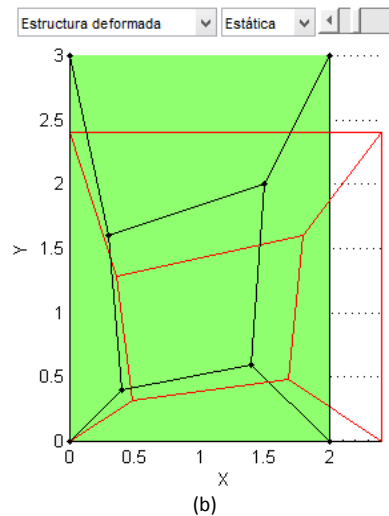
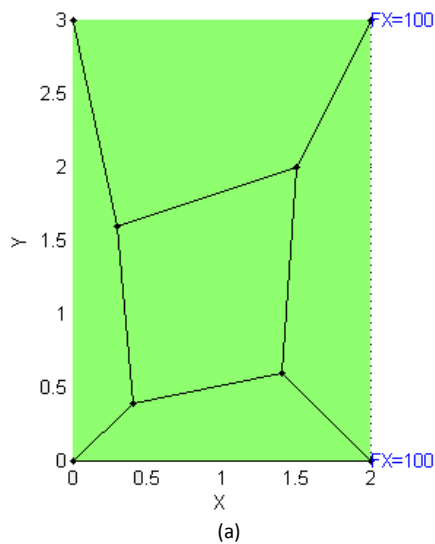
3 VALIDACIÓN

Con el objeto de encontrar relaciones que muestren la posible confiabilidad en los resultados de FEM-e2D, se ha utilizado ejemplos encontrados en la literatura y otros de ideas propias que permitan revelar las características del programa, los cuales se contrastan en algunos casos con resultados teóricos y en otros con resultados de SAP2000 como un paquete escogido previamente por su amplia confiabilidad en el sector del diseño de estructuras, tanto a nivel nacional, como internacional.

Al usar unidades compatibles entre sí y por tener los ejercicios unos propósitos de comprobación de resultados, las cargas, esfuerzos y deformaciones pueden ser escalados a voluntad, por lo que las unidades no requieren ser mostradas en las imágenes.

3.1 Esfuerzo Plano

3.1.1 Prueba de la Parcela⁴¹



⁴¹ Conocida también del inglés como *Patch Test*

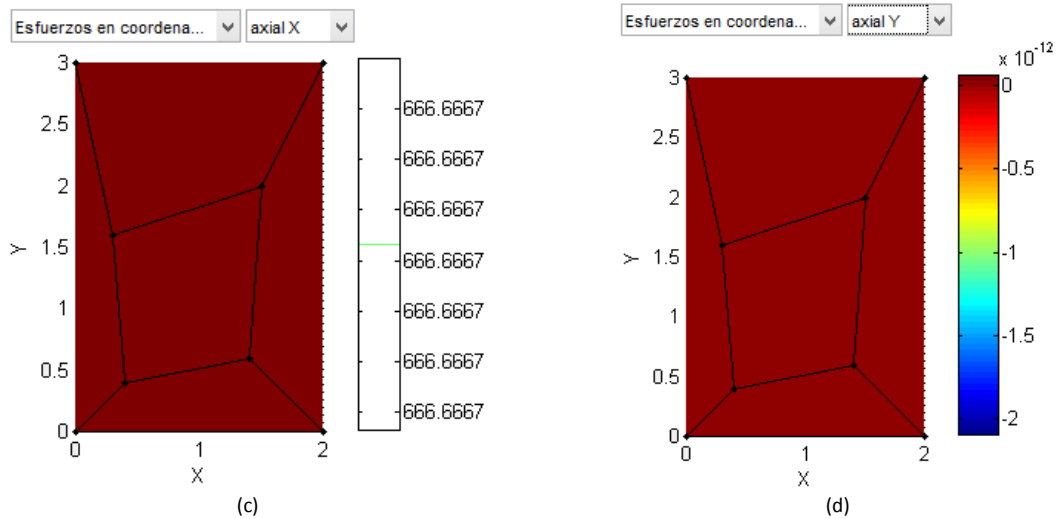


Ilustración 3-1 Prueba de la Parcela –estática- para Esfuerzo Plano⁴²

Cumple el criterio de la Parcela como se muestra en la Ilustración anterior, con carga total estática en el eje X de 200 kN y un resultado de esfuerzo constante de 666.6 kPa.

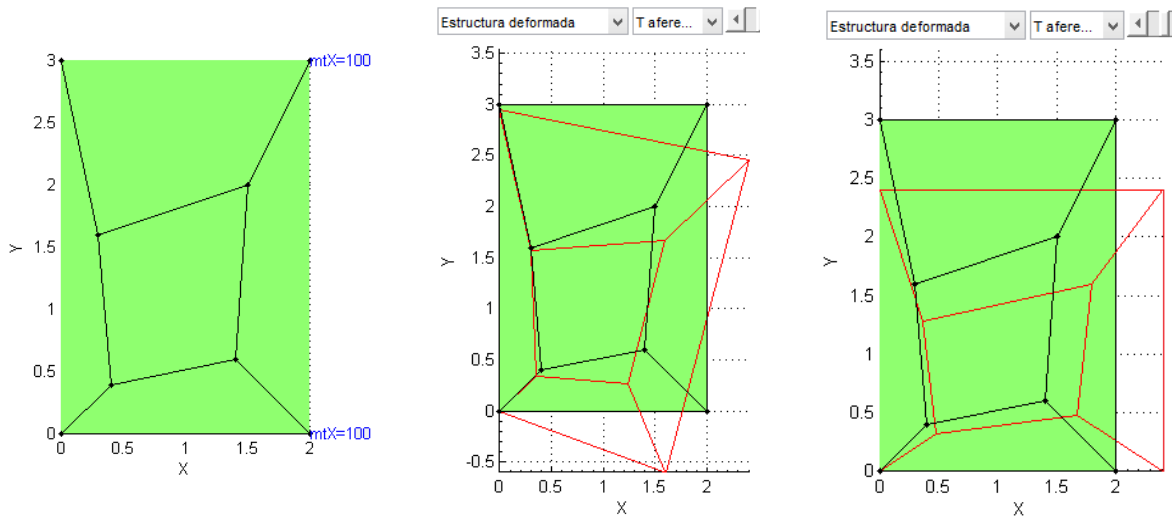


Ilustración 3-2 Prueba de la Parcela –dinámica- para Esfuerzo Plano

Usando unas masas concentradas de 100 kN.s²/m en cada una de los dos nudos extremos del eje X, obtenemos unos periodos de 0.36 y 0.22 segundos, los cuales son iguales a los comparados con la misma configuración en Sap2000.

3.1.2 Viga modelada con malla distorsionada A

La estructura de la siguiente figura tiene dos casos de carga, cargas horizontales y cargas verticales y es modelada con una malla que se distorsiona según el valor del parámetro a;

⁴² (a) Cargas. (b) deformación, (c) esfuerzos axiales eje X, (d) esfuerzos axiales eje Y

se le han calculado la deformación por traslación u y v y se expresan en porcentaje del valor calculado teórico, así:

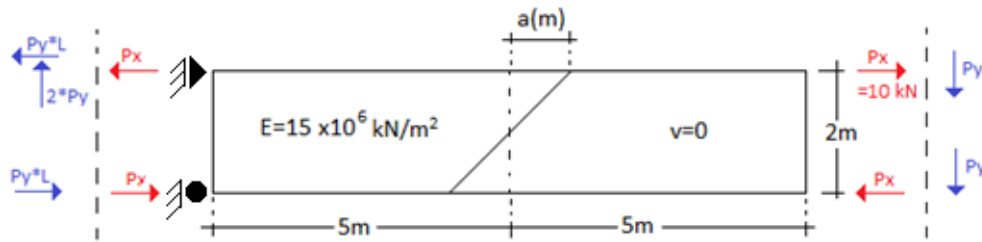


Ilustración 3-3 Viga Distorsionada A

Tabla 3-1 Viga Distorsionada A para Esfuerzo Plano

| Cálculo teórico (mm) | | | | | | |
|------------------------------|-----------------|-------|----------|---------------|--------|----------|
| Caso de cargas | horizontales Px | | | verticales Py | | |
| Deformación | u | v | θ | u | v | θ |
| | | -0.2 | -1 | -0.0002 | -0.148 | -1 |
| Calculado por Sap2000 | | | | | | |
| Distorsión a (m) | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| u | 24.2% | 12.7% | 8.5% | 24.6% | 13.1% | 8.6% |
| v | 24.2% | 12.7% | 8.5% | 24.8% | 16.1% | 12.2% |
| Calculado por FEM-e2D | | | | | | |
| Distorsión a (m) | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| u | 24.2% | 12.7% | 8.5% | 24.6% | 13.1% | 8.6% |
| v | 24.2% | 12.7% | 8.5% | 24.8% | 16.1% | 12.2% |

Puede observarse que los resultados de FEM-e2D tienen la misma precisión de Sap2000 y en este caso de esfuerzo plano, la misma debilidad teórica a la flexión por exceso de rigidez del modelo⁴³. Este tipo de modelo de elemento finito no tiene disponible el grado de libertad de giro, ni en Sap2000, ni en FEM-e2D.

3.2 Deformación Unitaria Plana

3.2.1 Prueba de la Parcela

Usando el modelo de Deformación Unitaria Plana y usando la estructura de la Ilustración 3-1, se cumple con el criterio de la Parcela con un esfuerzo constante de 666.6 kPa y una deformación en el eje X de 0.0012 m y de -7.8×10^{-4} m para el eje Y.

3.2.2 Sección de una presa

⁴³ Los lados rectos del cuadrilátero de cuatro nodos sin giros no puede reproducir correctamente la distribución de desplazamientos verticales en un estado de flexión, lo que le confiere una rigidez excesiva, previsible por la incapacidad de adoptar formas curvas (Oñate, 1992).

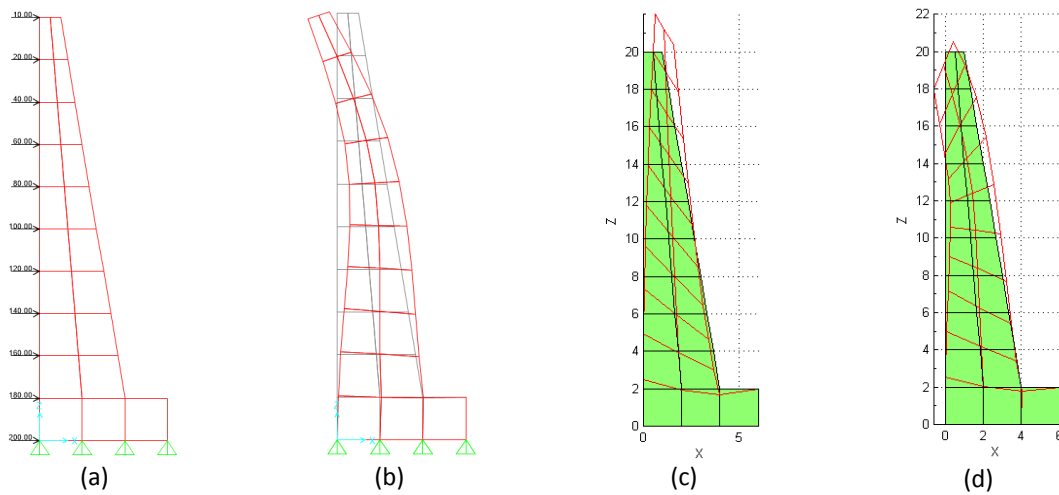


Ilustración 3-4 Sección de una Presa⁴⁴

Los resultados de la deformación u y v en el extremo más alto de cara al volumen a contener, es de 0.0038 y 3.3887×10^{-4} m respectivamente y los dos primeros periodos de vibración con el uso de masa aferente son 0.1339 y 0.0362 s, iguales tanto con el uso de Sap2000 como con FEM-e2D.

3.3 Esfuerzo Plano y Deformación Unitaria Plana incompatibles

3.3.1 Prueba de la Parcela

Usando la estructura de la Ilustración 3-1 se cumple con el Criterio de la Parcela para la adición de modos incompatibles en Esfuerzo Plano y Deformación Unitaria Plana, manteniendo los resultados de deformación y esfuerzo como si no se hubiesen adicionado tales modos.

3.3.2 Viga modelada con malla distorsionada A

Usando la viga con malla distorsionada de la Ilustración 3-3 modelada con Esfuerzo Plano adicionado con modos incompatibles, se comparan las deformaciones llegando a una precisión del 100% del resultado teórico en malla sin distorsión ($a=0$) y disminuyendo su precisión según se incrementa la distorsión; en todo caso, con un mejor comportamiento que el modelo de Esfuerzo Plano básico (Tabla 3-1 Viga Distorsionada A para Esfuerzo Plano de la página 49) que no tiene adición de modos incompatibles.

⁴⁴ (a) Sap2000 con fuerzas, (b) Sap2000 modo 2, (c) FEM-e2D deformación estática, (d) FEM-e2D modo 2

Tabla 3-2 Viga distorsionada A para Esfuerzo Plano + modos incompatibles

| Cálculo teórico (mm) | | | | | | |
|------------------------------|-----------------|-------|----------|---------------|--------|----------|
| Caso de cargas | horizontales Px | | | verticales Py | | |
| Deformación | u | v | θ | u | v | θ |
| | | -0.2 | -1 | -0.0002 | -0.148 | -1 |
| Calculado con Sap2000 | | | | | | |
| Distorsión a (m) | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| u | 100.0% | 61.7% | 53.4% | 101.4% | 64.9% | 58.1% |
| v | 100.0% | 61.7% | 53.4% | 95.8% | 71.5% | 68.7% |
| Calculado con FEM-e2D | | | | | | |
| Distorsión a (m) | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| u | 100.0% | 61.7% | 53.5% | 101.4% | 64.9% | 58.2% |
| v | 100.0% | 61.7% | 53.5% | 95.8% | 71.5% | 68.8% |

3.4 Membrana

3.4.1 Prueba de la Parcela

Usando la configuración de la estructura de la Ilustración 3-1 pudo comprobarse que se cumple con el Criterio de la Parcela con esfuerzo axial uniforme en el eje X de 666.6 kPa y deformaciones axiales U y V máximas de 0.00166 y -0.0006 m respectivamente.

3.4.2 Prueba de la Parcela de Tylor

Usando la configuración de la estructura presentada por (Geyer, 2000) con una carga axial uniforme de 300 kN sobre una membrana de espesor 0.1 m, con un material de módulo de elasticidad de 1'000.000 kPa y relación de *Poisson* de 0.3, se obtiene un esfuerzo axial constante en el sentido de la carga de 1.000 kPa, una deformación unitaria de alargamiento en el eje de la carga de 0.001 m/m y de acortamiento en los demás ejes de 0.0003 m/m, lo cual está exactamente representado en los resultados del modelo utilizado en FEM-e2D.

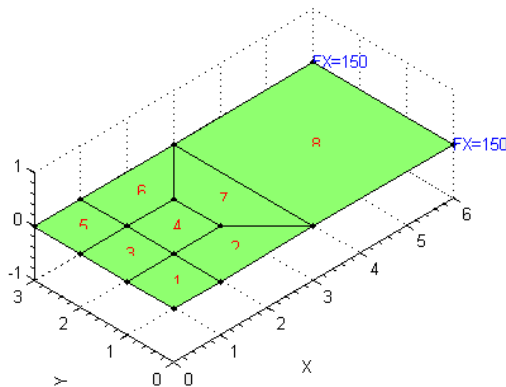


Ilustración 3-5 Prueba de la Parcela de Tylor

3.4.3 Viga modelada con malla distorsionada A

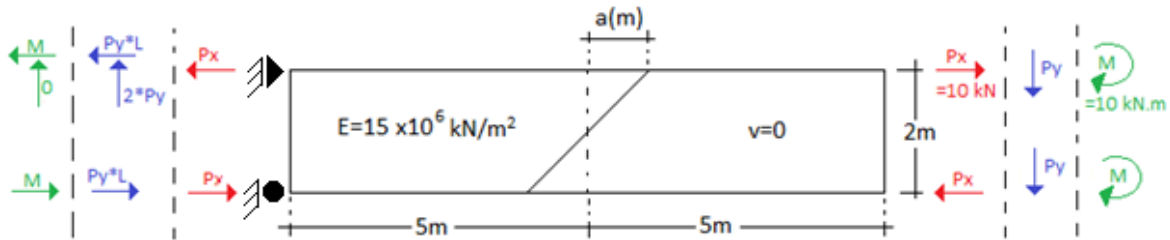


Ilustración 3-6 Viga Distorsionada A con caso de carga de momento

Usando la estructura de la Ilustración 3-6 Viga Distorsionada A con caso de carga de momento y el modelo Membrana, se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 3-3 Viga distorsionada A para Membrana

| Cálculo Teórico | | | | | | | | | |
|---|-----------------|--------|----------|---------------|--------|----------|------------|--------|----------|
| Caso de carga: | Horizontales Px | | | Verticales Py | | | Momento Mz | | |
| Deformación: | u | v | θ | u | v | θ | u | v | θ |
| | -0.2 | -1 | -0.0002 | -0.148 | -1 | -0.00015 | -0.2 | -1 | -0.0002 |
| Calculado con Sap2000 | | | | | | | | | |
| Distorsión a (m) | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| u | 100.0% | 75.1% | 74.2% | 101.4% | 78.9% | 80.4% | 100.0% | 71.5% | 65.1% |
| v | 100.0% | 75.1% | 74.2% | 95.8% | 81.5% | 82.3% | 100.7% | 71.4% | 65.1% |
| θ | 100.0% | -38.0% | -46.0% | 100.7% | -30.0% | -37.3% | 108.0% | -13.0% | -24.5% |
| Calculado con FEM-e2D Membrana | | | | | | | | | |
| Distorsión a (m) | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| u | 100.0% | 67.3% | 61.4% | 101.4% | 70.6% | 66.1% | 100.0% | 71.1% | 70.3% |
| v | 100.0% | 67.3% | 61.4% | 95.8% | 80.2% | 145.3% | 100.7% | 71.7% | 64.4% |
| θ | 100.0% | 66.2% | 61.7% | 100.7% | 72.5% | 82.4% | 109.2% | 78.6% | 77.6% |
| Calculado con FEM-e2D Membrana + modos incompatibles | | | | | | | | | |
| Distorsión a (m) | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| u | 100.0% | 77.1% | 389.8% | 101.4% | 81.0% | 422.9% | 100.0% | 82.2% | 468.4% |
| v | 100.0% | 77.1% | 389.8% | 95.8% | 91.6% | 237.2% | 100.7% | 81.9% | 475.2% |
| θ | 100.0% | 76.7% | 419.5% | 100.7% | 81.7% | 443.5% | 109.2% | 92.7% | 517.5% |

Se puede observar el buen comportamiento del modelo Membrana en FEM-e2D comparativamente con Sap2000, que en los dos casos pierden como era de esperarse la precisión al incrementar la distorsión del enmallado; para el caso del modelo Membrana con más modos incompatibles se obtiene un mejor comportamiento con poca distorsión, pero se ve perjudicado sus resultados al incrementar la distorsión.

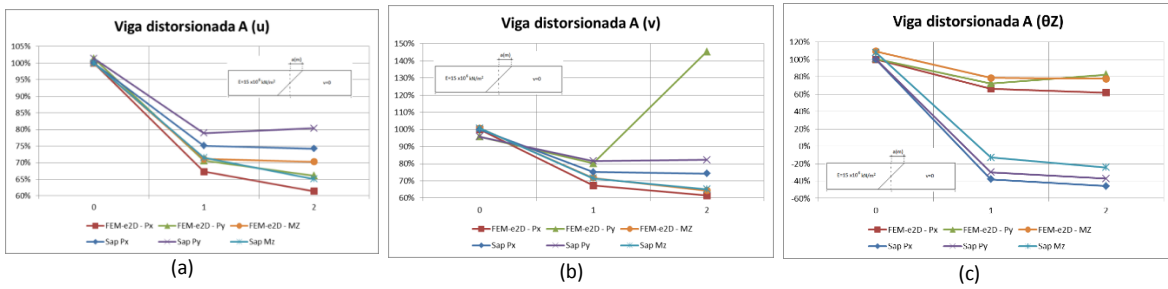


Ilustración 3-7 Viga distorsionada A para Membrana⁴⁵

Es fácilmente apreciable lo esperado, que tanto FEM-e2D como Sap2000 pierden precisión con el incremento en la distorsión, con la diferencia que en el caso de Sap2000 los giros con una pequeña distorsión se alejan del resultado teórico, incluso cambian de signo, aspecto que debe generar mucho cuidado al usar este programa, contrario al buen comportamiento de FEM-e2D.

3.4.4 Viga modelada con malla distorsionada B

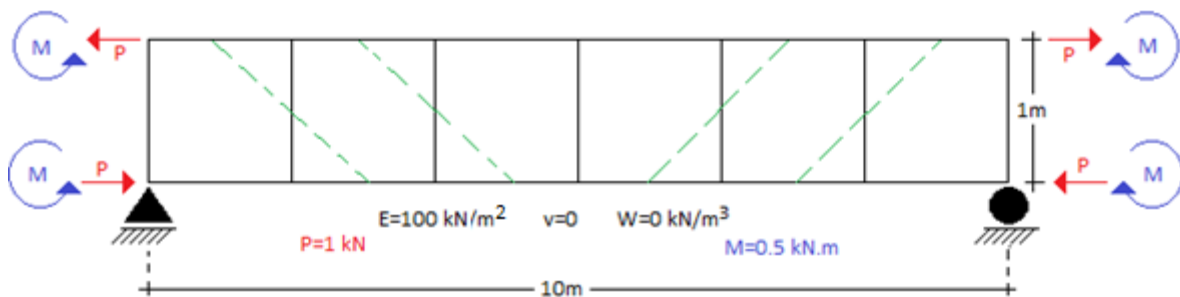


Ilustración 3-8 Viga simplemente apoyada

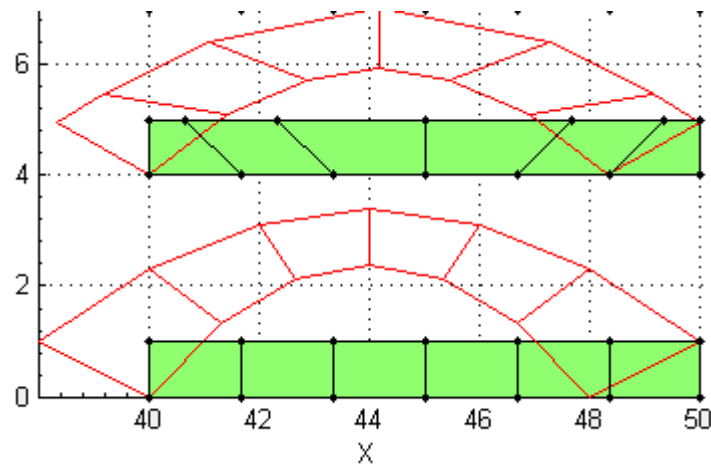


Ilustración 3-9 Deformación viga simplemente apoyada modelada con FEM-e2D

⁴⁵ (a) Deformación en X (u), (b) Deformación en Y (v), (c) Giro en Z (θ_z)

Se pudo observar que la modelación con FEM-e2D usando el modelo Membrana es prácticamente exacta a los resultados teóricos en malla regular y que a pesar de la debilidad esperada por los elementos finitos para malla irregular, los resultados de FEM-e2D comparados con Sap2000 son un poco inferiores para desplazamiento al usar el modelo Membrana y son mejores al usar Membrana con más modos incompatibles, además para el caso del giro, los resultados de FEM-e2D son iguales o superiores a los obtenidos con Sap2000; las demás comparaciones (Ibrahimbegovic M type, Ibrahimbegovic D type, Taylor & Simo) anotadas son las presentadas en la literatura (Ibrahimbegovic, Taylor, & Wilson, 1990).

A continuación se indican los resultados de la modelación con Sap2000 y FEM-e2D comparados con la literatura:

Tabla 3-4 Comparativo Viga simplemente apoyada para membranas

| Tipo de malla: | Malla regular | | | | Malla irregular | | | |
|------------------------------|---------------|----------|----------|----------|-----------------|----------|----------|----------|
| Caso de carga: | cargas P | | cargas M | | cargas P | | cargas M | |
| Deformación teórica: | v | θ | v | θ | v | θ | v | θ |
| | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% |
| Ibrahimbegovic M type | 100% | 100% | 100% | 103% | 76% | 95% | 93% | 84% |
| Ibrahimbegovic D type | 100% | 100% | 100% | 103% | 76% | 95% | 93% | 83% |
| Taylor & Simo | 100% | 200% | 100% | 365% | 76% | 184% | 93% | 384% |
| Sap-Membrane | 100% | 100% | 101% | 112% | 71% | 54% | 72% | 70% |
| FEM-e2D Membrana | 100% | 100% | 101% | 105% | 65% | 64% | 67% | 70% |
| FEM-e2D Membrana inc | 100% | 100% | 101% | 105% | 81% | 76% | 82% | 86% |

3.4.5 Viga corta en voladizo

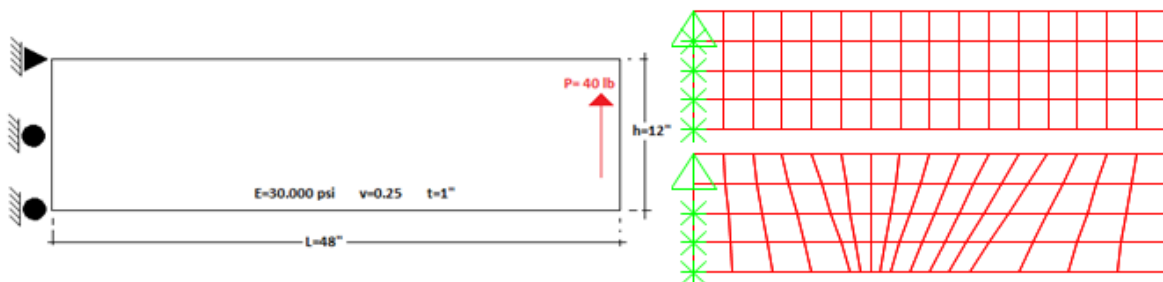


Ilustración 3-10 Viga corta en voladizo

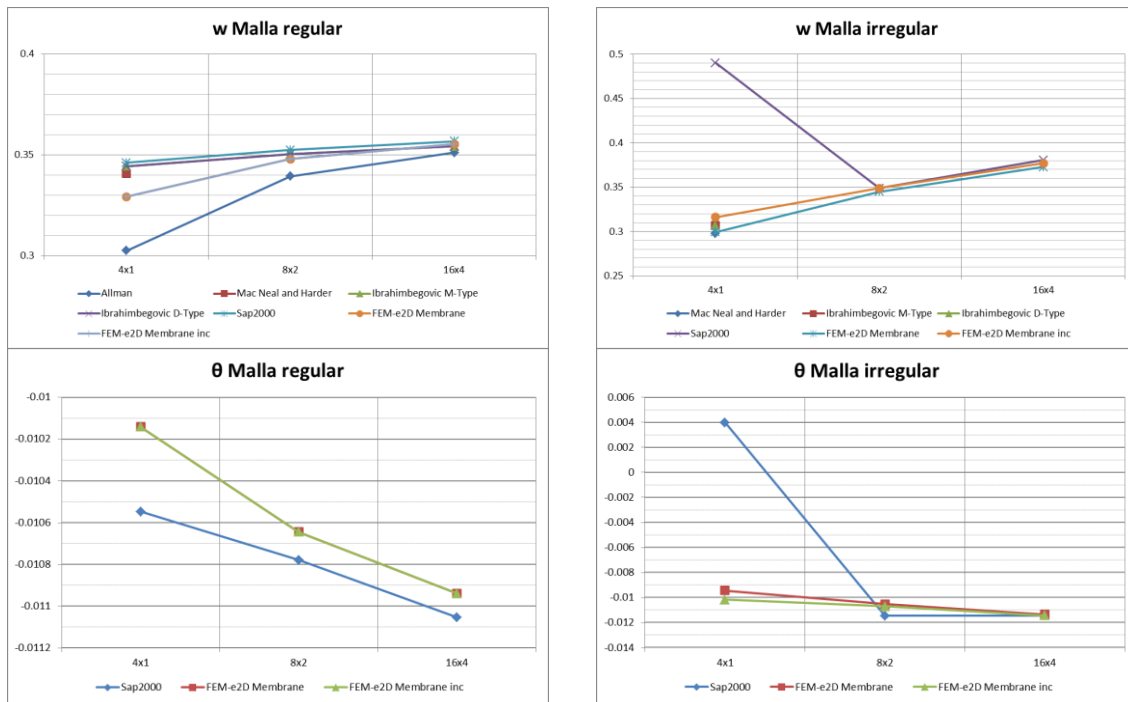


Ilustración 3-11 Comportamiento Membrana en viga corta

En esta configuración estructural se puede apreciar el buen comportamiento de los modelos Membrana, incluido el ligeramente mejorado Membrana con más modos incompatibles de FEM-e2D, los cuales, al describir el desplazamiento se comportan muy similar a los resultados de Sap2000 para malla regular y superiores para malla irregular; para describir el giro puede observarse su comportamiento muy similar a los encontrados con Sap2000 para malla regular y superiores en el caso de malla irregular. Debe notarse que se debe poner atención a los desplazamientos y giros de Sap2000 en el caso de mallas irregulares poco refinadas.

3.4.6 Cook's Membrane

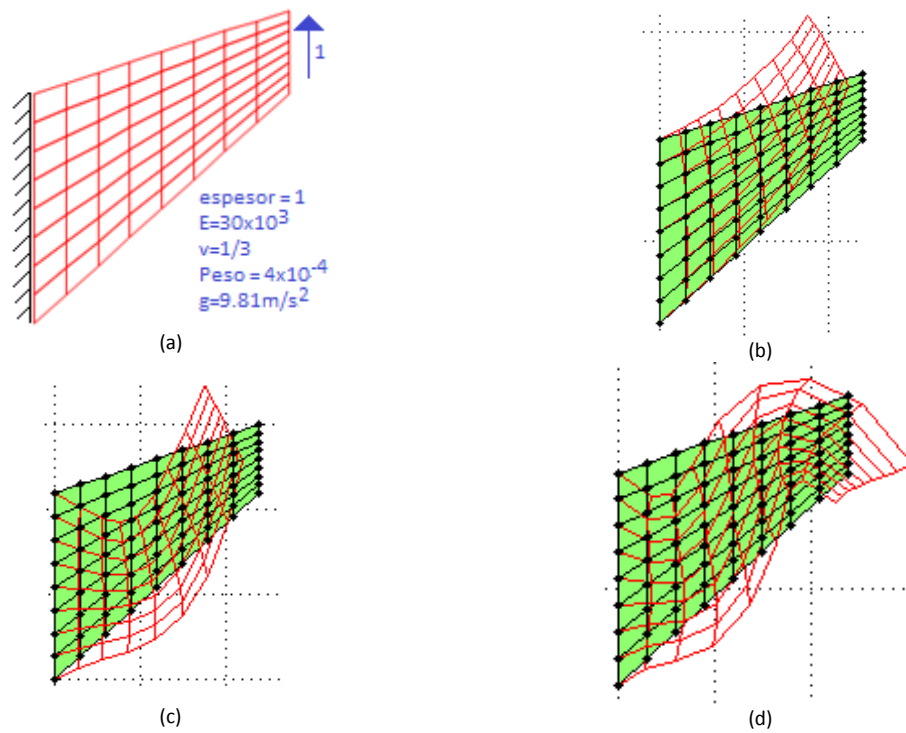


Ilustración 3-12 Cook's Membrane⁴⁶

Para la estructura irregular mostrada anteriormente, enmallada de forma lo más regular posible, con unidades compatibles, empotrada en el lado izquierdo, con una carga de 1 distribuida hacia arriba en el extremo derecho, una sección con espesor de 1, de material con módulo de elasticidad de 30×10^3 , relación de Poisson de $1/3$, peso de 4×10^{-4} , usando gravedad en metros se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 3-5 Deformación w en Cook's Membrane

| Enmallado | Allman | Simo et al. | Ibrahimbegovic M-Type | Ibrahimbegovic D-Type | Sap2000 | FEM-e2D Membrana | FEM-e2D Membr.+inc |
|------------|--------|-------------|-----------------------|-----------------------|---------|------------------|--------------------|
| 1x1 | | 16.743 | 14.066 | 14.065 | 15.5731 | 11.5844 | 16.8447 |
| 2x2 | 20.27 | 21.124 | 20.683 | 20.682 | 20.5239 | 19.3667 | 20.1283 |
| 4x4 | 22.78 | 23.018 | 22.993 | 22.984 | 23.4694 | 23.1003 | 23.4349 |
| 8x8 | 23.56 | 23.685 | 23.668 | 23.626 | 24.4823 | 24.0880 | 24.2247 |

⁴⁶ (a) Modelo en Sap2000, (b) Deformación en FEM-e2D, (c) Modo 1 de vibración, (d) Modo 4 de vibración

Tabla 3-6 Deformación de giro en Cook's Membrane

| Enmallado \ θ | Sap2000 | FEM-e2D Membrana | FEM-e2D Membr.+inc |
|----------------------|---------|------------------|--------------------|
| 1x1 | 0.8877 | 0.5788 | 0.9109 |
| 2x2 | 0.5611 | 0.9015 | 0.9044 |
| 4x4 | 0.9684 | 0.9155 | 0.9396 |
| 8x8 | 1.2093 | 1.0467 | 1.0718 |

Tabla 3-7 1er periodo de vibración en Cook's Membrane

| Enmallado \ T1 | Sap2000 | FEM-e2D Membrane (aférente) | FEM-e2D Membrane (consistente) | FEM-e2D Membr.+ inc (aférente) | FEM-e2D Membr.+inc (consistente) |
|----------------|---------|-----------------------------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| 1x1 | 0.7142 | 0.5884 | 1.8480 | 0.7412 | 2.0503 |
| 2x2 | 0.5797 | 0.5358 | 1.3430 | 0.5504 | 0.8012 |
| 4x4 | 0.5291 | 0.5195 | 1.0253 | 0.5243 | 0.6818 |
| 8x8 | 0.5206 | 0.5181 | 0.8351 | 0.5197 | 0.6747 |

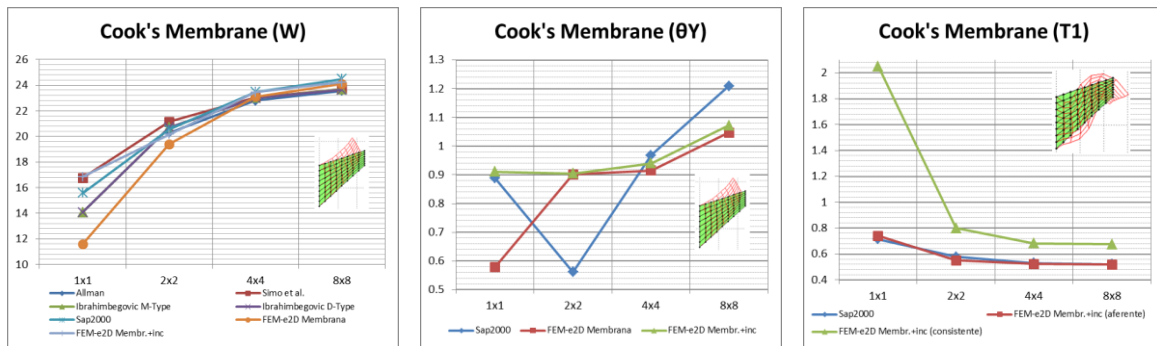


Ilustración 3-13 Cook's Membrane

A partir de la tabla y gráficos anteriores, puede observarse el buen comportamiento del análisis estático y dinámico⁴⁷ del modelo Membrana y Membrana con más modos incompatibles de FEM-e2D, los cuales convergen de forma similar a los indicados en la literatura (Ibrahimbegovic, Taylor, & Wilson, 1990) y usando Sap2000.

3.5 Placas

3.5.1 Prueba de la Parcela

Utilizando una estructura similar a la utilizada previamente para esta prueba y con unidades compatibles, se la ha adaptado para obtener una curvatura y esfuerzos constantes; se usa un momento total negativo de 200 alrededor del eje Y en el costado derecho y un momento de equilibrio positivo de 200.

⁴⁷ Se presenta aquí únicamente el primer periodo de vibración para cada uno de los enmallados

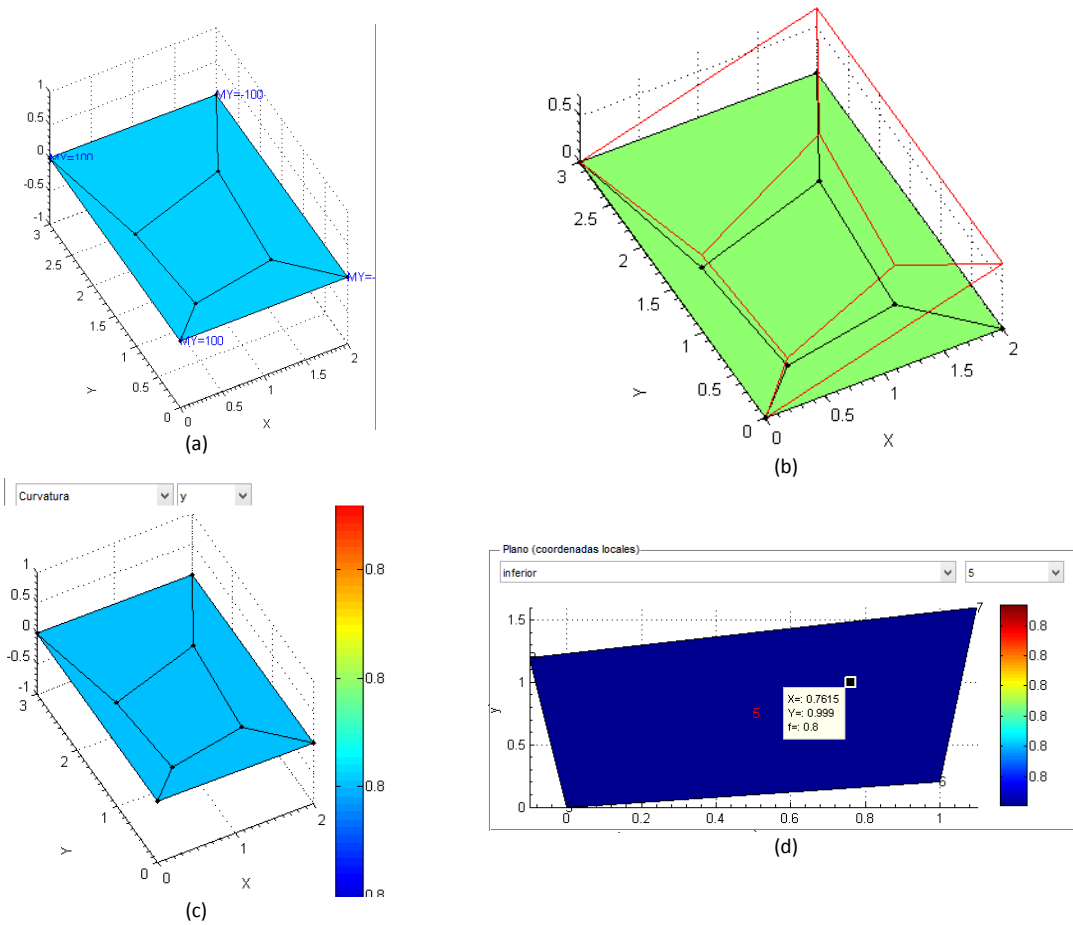


Ilustración 3-14 Prueba de la parcela para Placa –general-⁴⁸

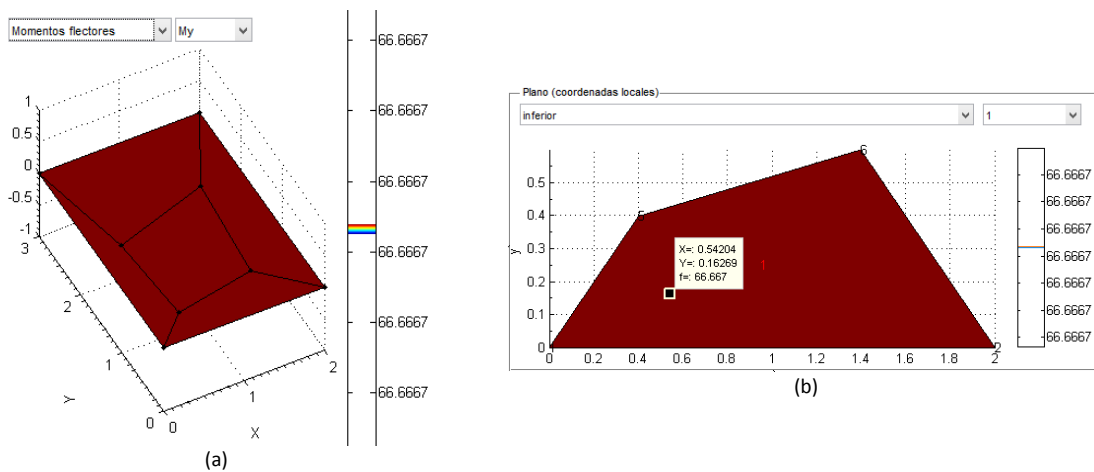


Ilustración 3-15 Momentos flectores en la Prueba de la Parcela para Placa⁴⁹

⁴⁸ (a) Configuración estructura con cargas, (b) Deformación, (c) Curvatura de la estructura, (d) Curvatura para plano 5

⁴⁹(a) Momento flector en MFy' con toda la estructura, (b) Momento flector local MFy' para el plano 1,

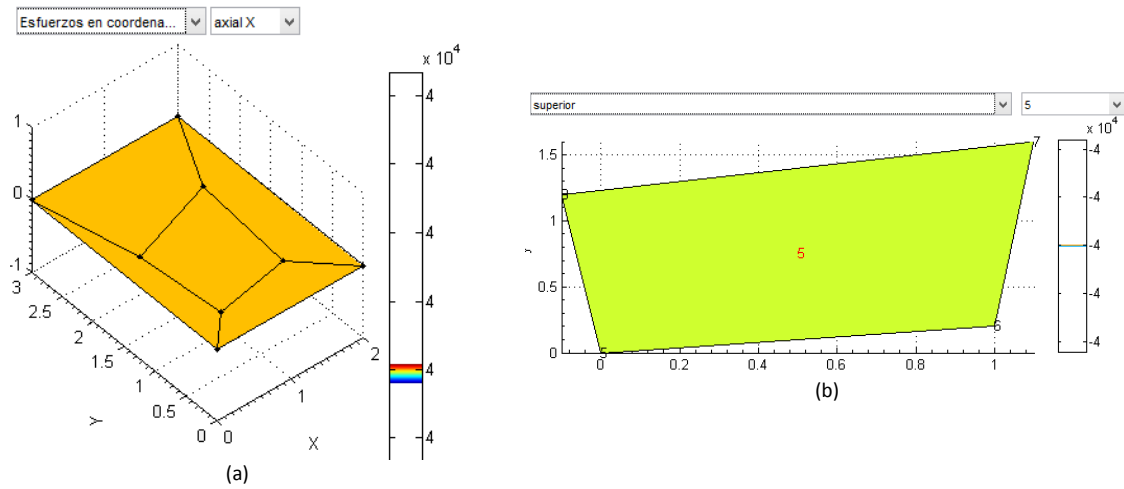


Ilustración 3-16 Esfuerzos en la Prueba de la Parcela para Placa⁵⁰

El resultado tanto para Placa Gruesa como para Placa Delgada satisface la Prueba de la Parcela, con una deformación máxima de desplazamiento fuera del plano de 1.6, un momento flector respecto el eje Y de 66.6667 por unidad de longitud y una curvatura y esfuerzos axiales en X constantes de 0.8 y 40.000 respectivamente.

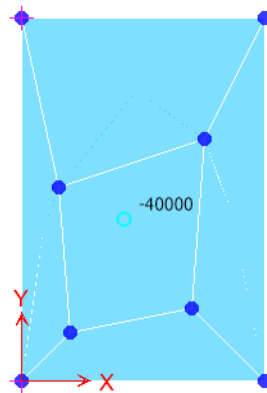


Ilustración 3-17 Prueba de la Parcela a Placa en Sap2000

El resultado de modelar esta misma estructura con Sap2000 muestra los mismos resultados de esfuerzo constante que FEM-e2D.

⁵⁰ (a) Esfuerzos axiales x' de toda la estructura, (b) Esfuerzos axiales x' del plano 5

3.5.2 Viga modelada como placa

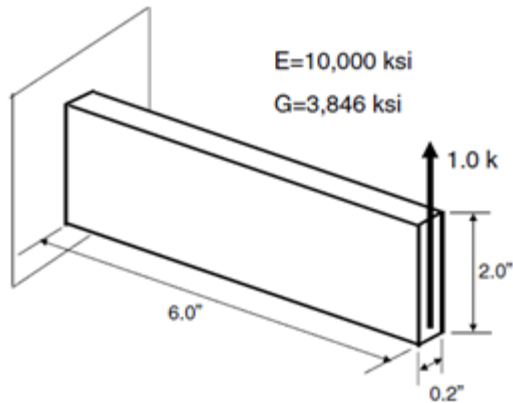


Ilustración 3-18 Viga en voladizo con un elemento

Utilizando la estructura de la ilustración anterior, presentada previamente por (Wilson E. L., 1999), que es una viga en voladizo, se puede apreciar el comportamiento de los modelos de placa usados en FEM-e2D para simular el comportamiento de dicha viga.

Tabla 3-8 Viga modelada como placa

| Tipo | Parámetro | v=0 | | | v=0.3 | | |
|-----------------------------|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | | Teoría | FEM | SAP2000 | Teoría | FEM | SAP2000 |
| Placa gruesa ⁵¹ | w (m) | 5.76E-04 | 5.76E-04 | 5.76E-04 | 5.87E-04 | 5.87E-04 | 5.87E-04 |
| | T1 aferente (s) | 0.250 | 0.258 | 0.258 | 0.250 | 0.261 | 0.261 |
| | T1 consistente (s) | | 0.183 | | | 0.186 | |
| Placa delgada ⁵² | w (m) | 5.40E-04 | 5.40E-04 | 5.40E-04 | 5.40E-04 | 5.40E-04 | 5.40E-04 |
| | T1 aferente (s) | 0.250 | 0.250 | 0.250 | 0.250 | 0.250 | 0.250 |
| | T1 consistente (s) | | 0.195 | | | 0.195 | |

Este caso no requiere refinación, pues los resultados son perfectamente aceptables al compararlos con los resultados teóricos estáticos y dinámicos, tanto en FEM-e2D como Sap2000.

⁵¹ Usando la teoría de Reissner - Middlin

⁵² Usando la teoría de Kirchhoff

3.5.3 Placa con carga puntual al centro

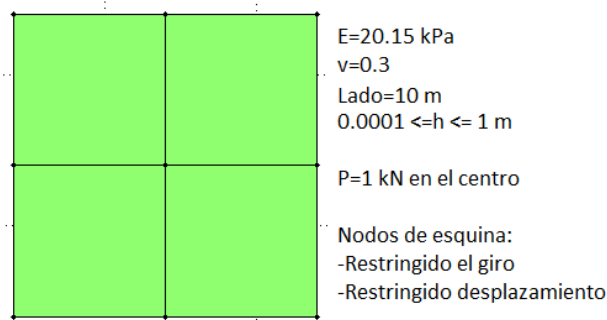


Ilustración 3-19 Placa con carga puntual al centro

Utilizando unas placas cuadradas, presentada previamente por (Wilson E. L., 1999), de lado 10m, espesor constante entre 1m y $1 \times 10^{-4} \text{ m}$, módulo de elasticidad de 20.15 kPa, relación de *Poisson* 0.3 y una carga puntual de 1kN en el centro de un enmallado de 2x2 se obtienen los siguientes resultados de análisis estático y dinámico utilizando FEM-e2D y Sap2000:

Tabla 3-9 Placa con carga puntual al centro calculada con Sap2000

| Sap2000 | Placa delgada | | Placa gruesa | |
|---------------|---------------|--------------|---------------|--------------|
| Espesor (h) | $w \cdot h^3$ | $T1 \cdot h$ | $w \cdot h^3$ | $T1 \cdot h$ |
| 1 | 1.195 | 60.891 | 1.138 | 56.721 |
| 0.1 | 1.195 | 60.891 | 1.061 | 53.926 |
| 0.01 | 1.195 | 60.891 | 1.060 | 53.898 |
| 0.001 | 1.195 | 60.891 | 1.060 | 53.898 |
| 0.0001 | 1.195 | 60.891 | 1.060 | 53.898 |

Tabla 3-10 Placa con carga puntual al centro calculada con FEM-e2D

| FEM-e2D | Placa delgada | | | Placa gruesa | | |
|---------------|---------------|--------------------|--------------------|---------------|---------------|---------------|
| Espesor (h) | $w \cdot h^3$ | $Ta^{531} \cdot h$ | $Tc^{541} \cdot h$ | $w \cdot h^3$ | $Ta1 \cdot h$ | $Tc1 \cdot h$ |
| 1 | 1.195 | 60.891 | 66.931 | 1.209 | 46.392 | 62.758 |
| 0.1 | 1.195 | 60.891 | 66.931 | 1.132 | 57.977 | 60.110 |
| 0.01 | 1.195 | 60.891 | 66.931 | 1.131 | 57.944 | 60.083 |
| 0.001 | 1.195 | 60.891 | 66.931 | 1.131 | 57.944 | 60.083 |
| 0.0001 | 1.195 | 60.891 | 66.931 | 1.131 | 57.944 | 60.084 |

Con un enmallado más refinado hasta 16x16, Sap2000 obtiene una deformación de 1.207 y 1.198 para placa delgada y placa gruesa respectivamente, por su lado FEM-e2D obtiene 1.316 y 1.274 para placa delgada y placa gruesa respectivamente.

⁵³ Usando masa aferente

⁵⁴ Usando masa consistente

3.5.4 Placa simplemente apoyada con carga distribuida

Usando la misma estructura del acápite anterior, con cargas puntuales equivalentes aferentes provenientes de una carga distribuida de 1 kN/m^2 , podemos obtener los siguientes resultados:

| $w \cdot h^3$ | Placa delgada | | Placa gruesa | |
|---------------|---------------|---------|--------------|---------|
| | SAP | FEM-e2D | SAP | FEM-e2D |
| 1 | 48.373 | 48.373 | 43.138 | 44.693 |
| 0.1 | 48.373 | 48.373 | 39.306 | 40.861 |
| 0.01 | 48.373 | 48.373 | 39.267 | 40.823 |
| 0.001 | 48.370 | 48.373 | 39.270 | 40.822 |
| 0.0001 | 48.370 | 48.373 | 39.270 | 40.822 |

Tabla 3-11 Placa con carga distribuida

Se puede observar el buen comportamiento de FEM-e2D comparativamente con Sap2000.

3.6 Cáscaras

3.6.1 Prueba de la Parcela

Utilizando la estructura de las anteriores pruebas de la Parcela, para evaluar la Cáscara Delgada y la Cáscara Gruesa, en esta ocasión se ha rotado $+45^\circ$ en el eje y' , se usaron las cargas de membrana y de placa simultáneamente, produciendo los mismos resultados esperados en esfuerzos constantes axiales x' de $39.333,33$ Y $40.666,66$ kPa en la fibra superior e inferior respectivamente, una curvatura de rotación al eje y' constante por acción de la carga de placa de 0.8 .

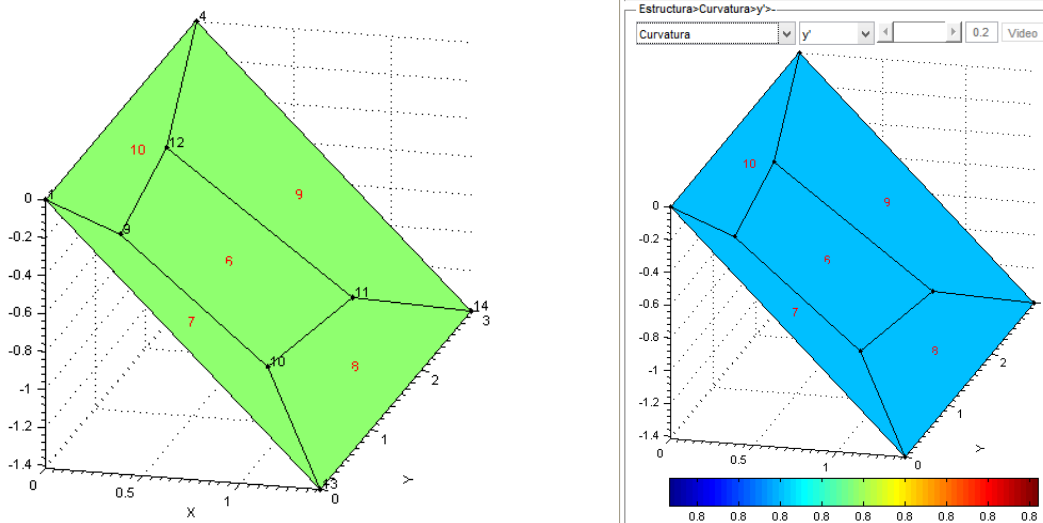


Ilustración 3-20 Geometría y curvatura en Prueba de la Parcela para Cáscaras

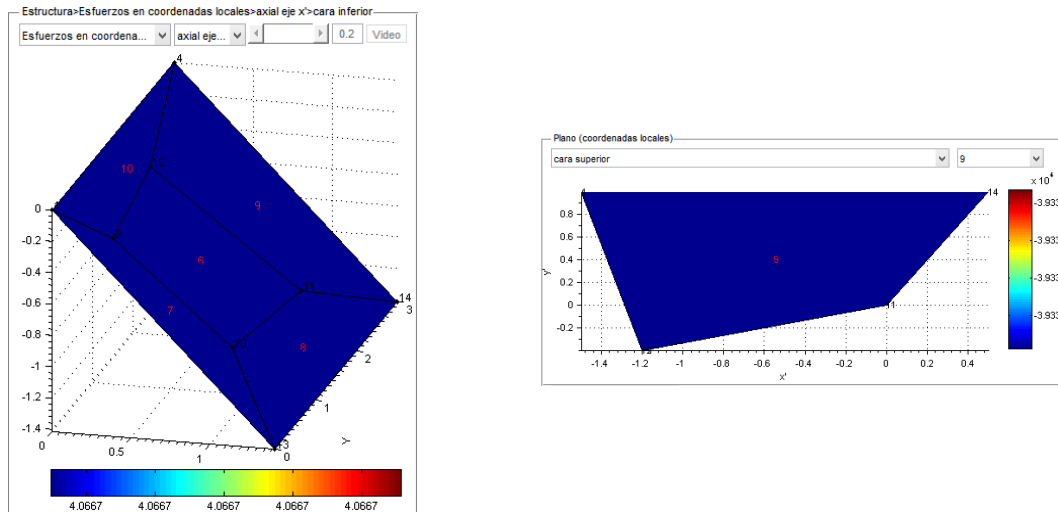


Ilustración 3-21 Esfuerzos en Prueba de la Parcela para Cáscaras

3.6.2 Scordelis-Lo Barrel Vault

Este es un problema presentado en (Scordelis & Lo, 1964) y utilizado por (Wilson E. L., 1999), es usado aquí para comparar los resultados entre FEM-e2D y Sap2000; se trata de una cubierta con el plano XY curvado de radio 25', longitud en el eje Y de 50', un ángulo total de la zona curvada de 80°, espesor 0.25', módulo de elasticidad de 4.32×10^8 lb/pie², relación de Poisson de 0 y peso unitario de 360 lb/pie³; aprovechando la simetría del problema se modela la cuarta parte de toda la cubierta. Los resultados comparativos en deformación, momentos flectores y modos de vibración son similares en los dos softwares.

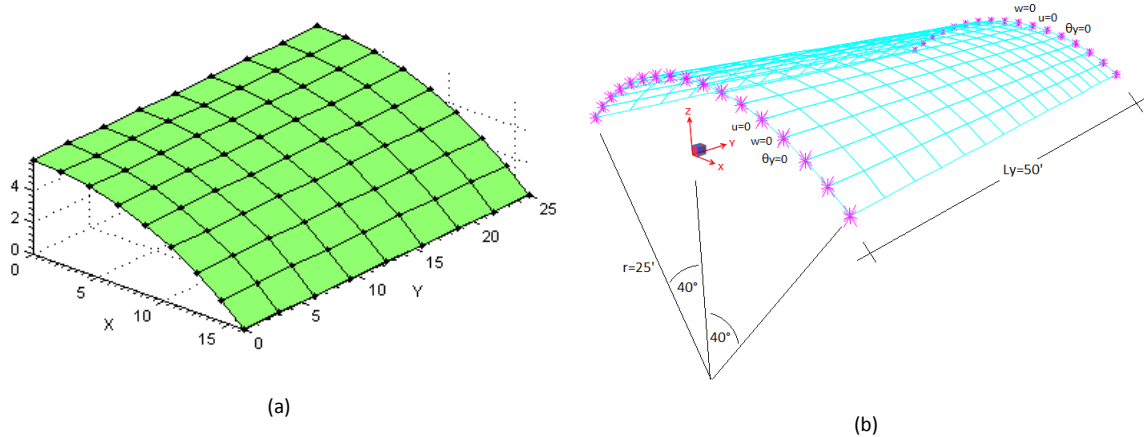
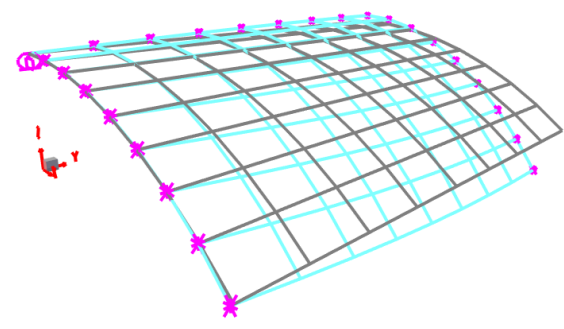
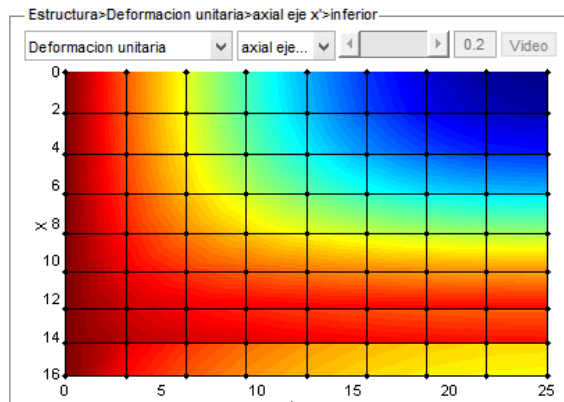
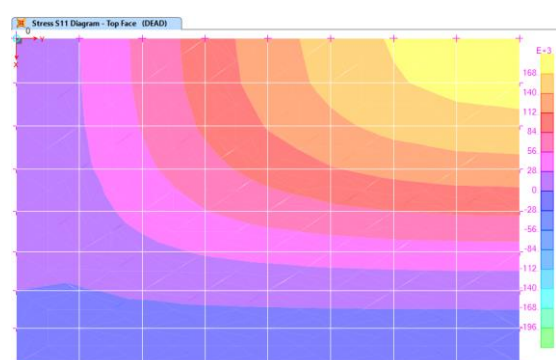
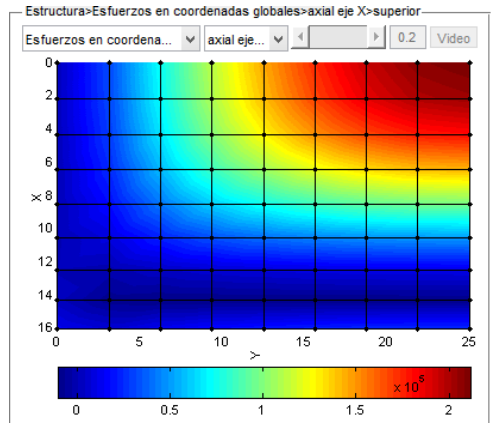


Ilustración 3-22 Scordelis-Lo Barrel vault - Geometría⁵⁵

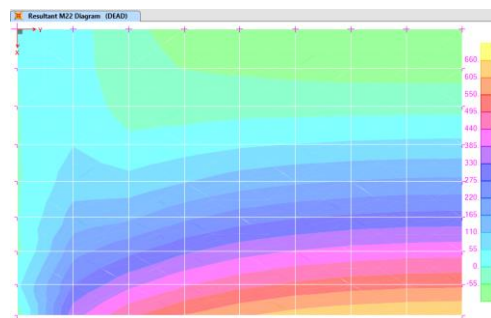
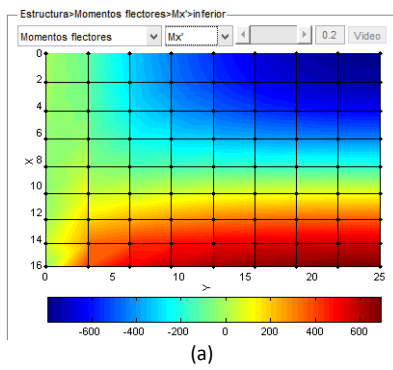
⁵⁵ (a): Sección modelada con FEM-e2D. (b): Estructura total



(a)
Ilustración 3-23 Scordelis-Lo Barrel vault - General y deformación⁵⁶

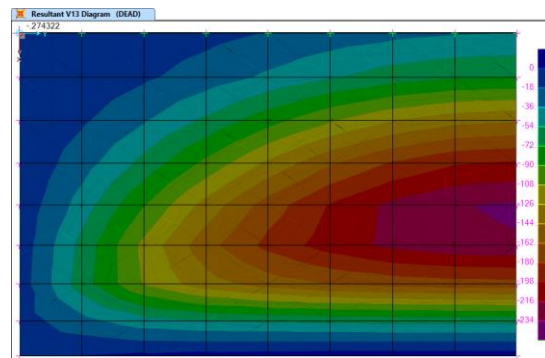
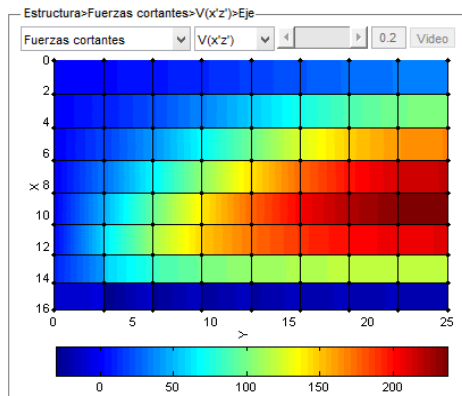


(a)
Ilustración 3-24 Scordelis-Lo Barrel Vault - Esfuerzos⁵⁷



(a)
Ilustración 3-25 Scordelis-Lo Barrel Vault - Momentos⁵⁸

⁵⁶ (a) Deformación unitaria (FEM-e2D), (b) Deformada (Sap2000)
⁵⁷ (a) Esfuerzo axial eje global X cara superior alisado (FEM-e2D), (b) Esfuerzo axial eje local 11 cara superior alisado (Sap2000)
⁵⁸ (a) Momento flector alrededor del eje local x' sin alisar (FEM-e2D), (b) Momento flector en la cara del eje 2 alisado (Sap2000)



(a)

(b)

Ilustración 3-26 Scordelis-Lo Barrel Vault - Cortantes⁵⁹

Tabla 3-12 Deformación w para Scordelis-Lo Barrel Vault

| mallá | FEM-e2D Cáscara delgada | FEM-e2D Cáscara gruesa | SAP Shell Thin | SAP Shell Thick |
|-------|-------------------------|------------------------|----------------|-----------------|
| 2x2 | 145% | 154% | 136% | 68% |
| 4x4 | 108% | 111% | 103% | 102% |
| 6x6 | 105% | 106% | 99% | 100% |
| 8x8 | 104% | 105% | 98% | 99% |
| 10x10 | 98% | 100% | 98% | 98% |

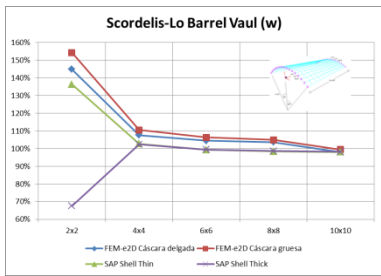
Tabla 3-13 Momentos flectores para Scordelis-Lo Barrel Vault

| MF (y') min(neg) | FEM-e2D Cáscara delgada | FEM-e2D Cáscara gruesa | SAP Shell Thin | SAP Shell Thick |
|------------------|-------------------------|------------------------|----------------|-----------------|
| 2x2 | 141% | 152% | 127% | 110% |
| 4x4 | 115% | 118% | 103% | 101% |
| 6x6 | 112% | 114% | 100% | 100% |
| 8x8 | 112% | 113% | 99% | 100% |
| 10x10 | 99% | 100% | 99% | 99% |

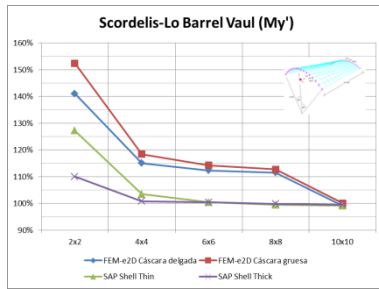
Tabla 3-14 Periodo 1 para Scordelis-Lo Barrel Vault

| T1 (s) | FEM-e2D C.delgada (af) | FEM-e2D C.gruesa (af) | FEM-e2D C.delgada (cons) | FEM-e2D C.gruesa (cons) | SAP Shell Thin | SAP Shell Thick |
|--------|------------------------|-----------------------|--------------------------|-------------------------|----------------|-----------------|
| 2x2 | 0.75 | 0.78 | 0.66 | 0.67 | 0.72 | 0.70 |
| 4x4 | 0.60 | 0.61 | 0.61 | 0.61 | 0.59 | 0.59 |
| 6x6 | 0.59 | 0.59 | 0.60 | 0.61 | 0.57 | 0.57 |
| 8x8 | 0.58 | 0.58 | 0.60 | 0.60 | 0.57 | 0.57 |
| 10x10 | 0.57 | 0.57 | 0.58 | 0.58 | 0.57 | 0.57 |

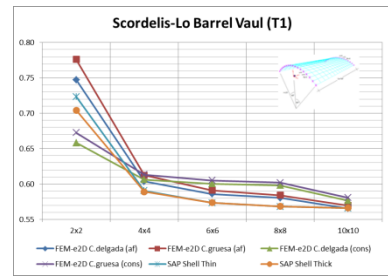
⁵⁹ (a) Fuerza cortante cara x' dirección z' sin alisar (FEM-e2D), (b) Fuerza cortante cara 1 dirección 3 alisado (Sap2000)



(a)



(b)



(c)

Ilustración 3-27 Comparación modelos en Scordelis-Lo Barrel Vault

4 CONCLUSIONES

El desarrollo del presente trabajo, las dificultades presentadas y finalmente el logro de los objetivos, hacen que se pueda presentar las siguientes conclusiones:

- El paquete de cómputo FEM-e2D desarrollado en el presente trabajo, mejora el alcance del *toolbox* de Matlab preexistente FEM-e1D, incluyendo herramientas para modelar elementos planos de esfuerzo plano, deformación unitaria plana, inclusión de modos incompatibles, membrana, placa y cáscara.
- El desarrollo de los ejercicios de verificación seleccionados para poner a prueba los resultados de FEM-e2D, permitieron afirmar que el desarrollo computacional presentado tiene validez matemática dentro de lo esperado en la modelación con el Método de los Elementos Finitos.
- El manual de usuario presentado, acompañado de un conocimiento previo en ingeniería estructural, contribuye al uso y aplicación correctos de FEM-e2D.
- La formulación general de los elementos finitos con el uso de variables simbólicas en FEM-e2D permite versatilidad en la programación de los diferentes elementos, pero requiere más tiempo de cómputo.
- Se evidencian deficiencias esperadas en los resultados de la modelación de estructuras planas simples con los elementos finitos enmallados de forma irregular, tanto en FEM-e2D, como de Sap2000, que hacen necesario el estudio de su impacto en los parámetros de análisis y diseño de estructuras a escala real.
- La inexistencia de una estructura de datos global en el componente computacional existente, dificultó la labor de mejorar su alcance y es evidencia que los esfuerzos en la creación de futuros paquetes computacionales propios no evolucionará con la rapidez y coherencia esperada.

Finalmente podemos concluir que el desarrollo de FEM-e2D en código abierto de Matlab, para el *toolbox* de Elementos Finitos FEM, analiza consistentemente estática y dinámicamente modelos estructurales planos.