

ESPECIALIZACIÓN EN ESTRUCTURAS ANÁLISIS ESTRUCTURAL AVANZADO

ELEMENTOS UNIDIMENSIONALES ESFUERZO AXIAL PURO

Michel Bolaños Guerrero

Ing. Civil, Especialista en Estructuras,
Magister en Ingeniería – Énfasis en Ingeniería Civil,
Doctor en Ingeniería – Énfasis en Mecánica de Sólidos

2025-B

Facultad de Ingeniería - Especialización en Estructuras

<https://michel.udenar.edu.co/> - michel@udenar.edu.co

Universidad de Nariño

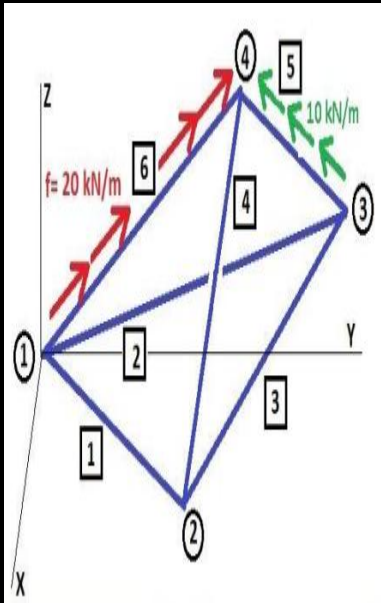
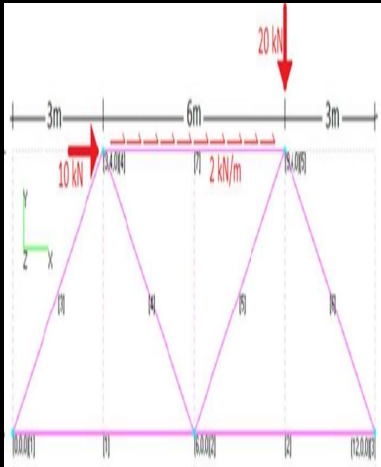


ELEMENTOS UNIDIMENSIONALES SOMETIDOS A ESFUERZO AXIAL PURO

1. Definición esfuerzo axial puro.
2. Ecuación matricial local 1D.
3. Ecuaciones matricial local 3D.
4. Rotación.
5. Ensamblaje.
6. Solución

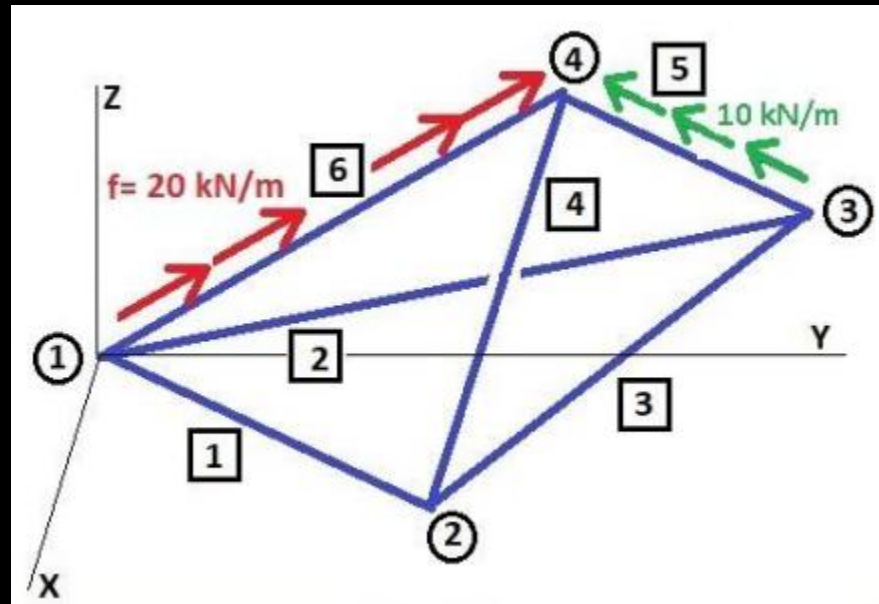
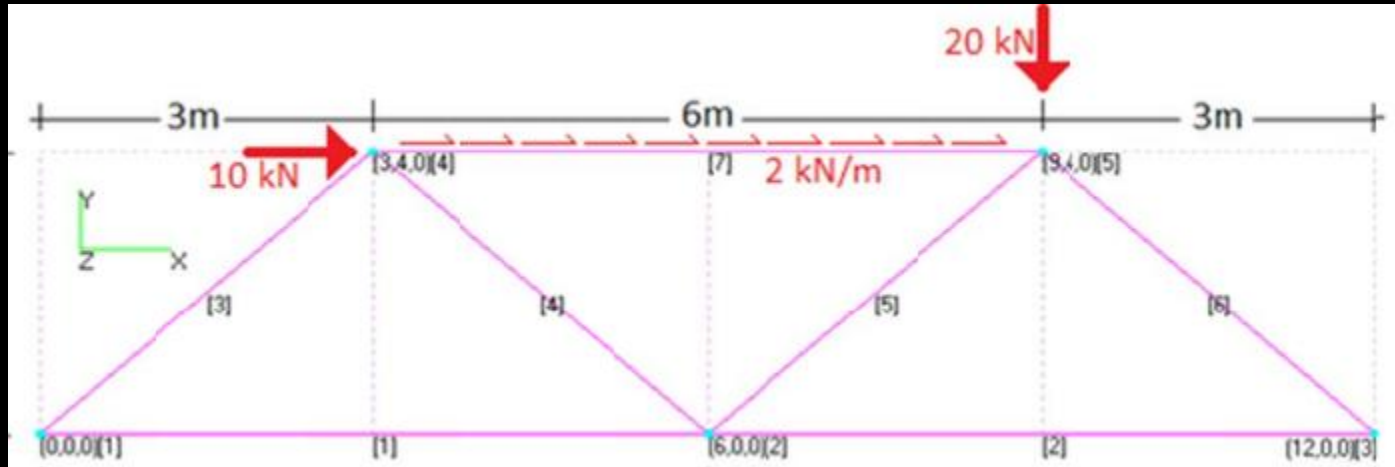


1. DEFINICIÓN ESF. AXIAL PURO

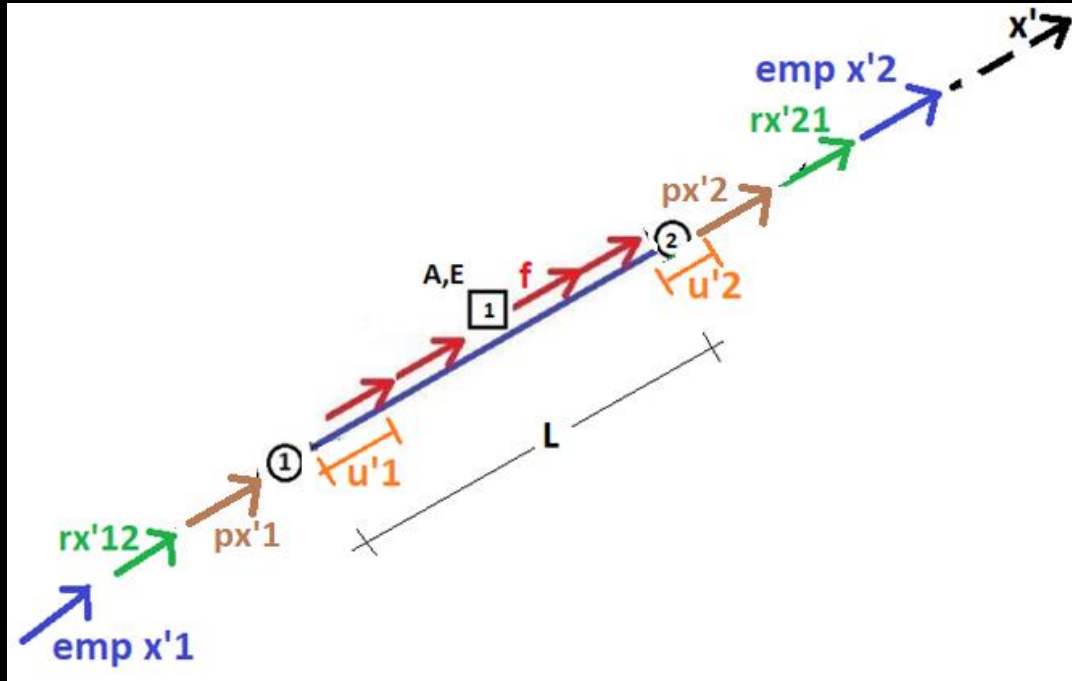


- Conexiones por medio de pasadores sin fricción
- Elementos rectos
- Dentro del campo de pequeñas deformaciones y rango elástico lineal
- ~~• Cargas, incluidas reacciones, solamente en los nudos~~
- Cargas, incluidas reacciones, puntuales en los nudos y distribuidas axiales dentro de los elementos

1. DEFINICIÓN ESF. AXIAL PURO



2. ECUACIÓN MATRICIAL LOCAL 1D



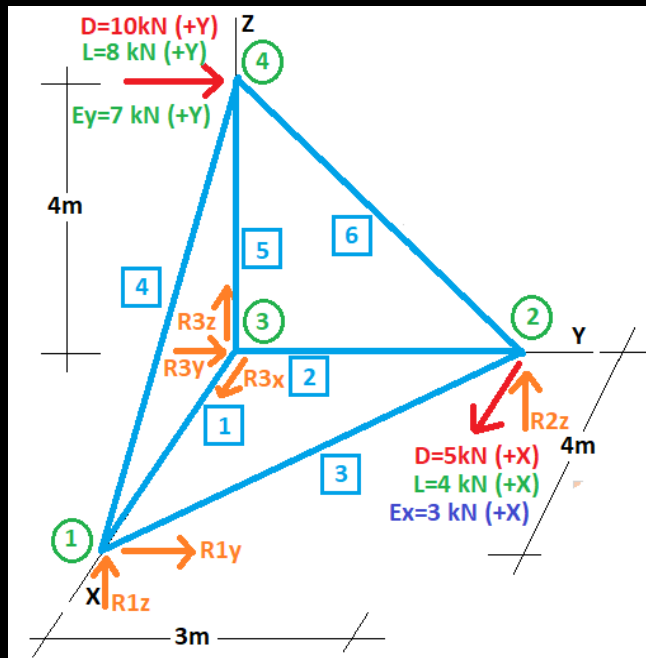
ECUACIÓN MATRICIAL LOCAL 1D EN COORDENADAS LOCALES

$$\{r'\} + \{p'\} = [k']\{d'\} + \{emp'\}$$

$$\begin{Bmatrix} r'_{12} \\ r'_{21} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^{x'} \\ p_2^{x'} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} emp_1^{x'} \\ emp_2^{x'} \end{Bmatrix}$$



2. ECUACIÓN MATRICIAL LOCAL 1D



[k'] [KN/cm]		{r'} [KN]	
u'1	u'3		D
5	-5	rx'13	-5
-5	5	rx'31	5

{d'} [cm,°]	
	D
u'1	-1
u'3	0

[k']		{r'}	
u'3	u'2		D
7	-7	rx'32	-13.75
-7	7	rx'23	13.75

{d'}	
	D
u'3	0
u'2	2.0625

[k']		{r'}	
u'1	u'2		D
4	-4	rx'12	6.25
-4	4	rx'21	-6.25

{d'}	
	D
u'1	-0.8
u'2	-2.3625

ECUACIÓN MATRICIAL LOCAL 1D EN COORDENADAS LOCALES

$$\{r'\} + \{p'\} = [k']\{d'\} + \{emp'\}$$

$$\begin{Bmatrix} r'_{12} \\ r'_{21} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^{x'} \\ p_2^{x'} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} emp_1^{x'} \\ emp_2^{x'} \end{Bmatrix}$$

3. ECUACIÓN MATRICIAL LOCAL 3D

$$\{r'\} + \{p'\} = [k']\{d'\} + \{emp'\}$$

$$\begin{Bmatrix} r_{12}^{x'} \\ r_{12}^{y'} \\ r_{12}^{z'} \\ r_{21}^{x'} \\ r_{21}^{y'} \\ r_{21}^{z'} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^{x'} \\ p_1^{y'} \\ p_1^{z'} \\ p_2^{x'} \\ p_2^{y'} \\ p_2^{z'} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ w'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \\ w'_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} emp_1^{x'} \\ 0 \\ 0 \\ emp_2^{x'} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



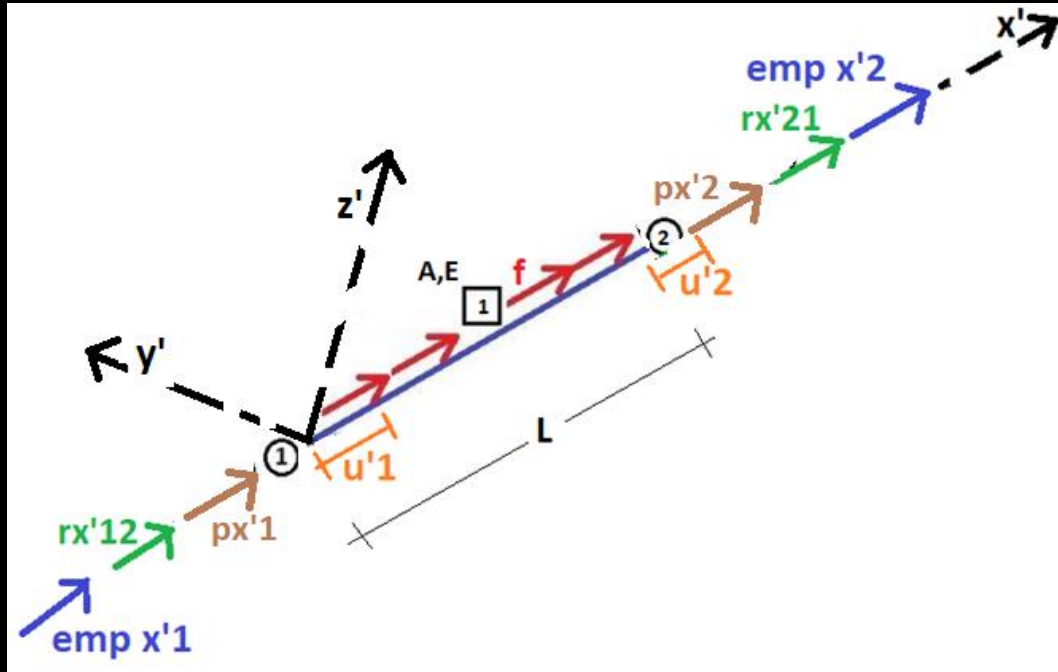
3. ECUACIÓN MATRICIAL LOCAL 3D



$$\begin{Bmatrix} r_{12}^{x'} \\ r_{12}^{y'} = 0 \\ r_{12}^{z'} = 0 \\ r_{21}^{x'} \\ r_{21}^{y'} = 0 \\ r_{21}^{z'} = 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^{x'} \\ p_1^{y'} \\ p_1^{z'} \\ p_2^{x'} \\ p_2^{y'} \\ p_2^{z'} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ w'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \\ w'_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} emp_1^{x'} \\ 0 \\ 0 \\ emp_2^{x'} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



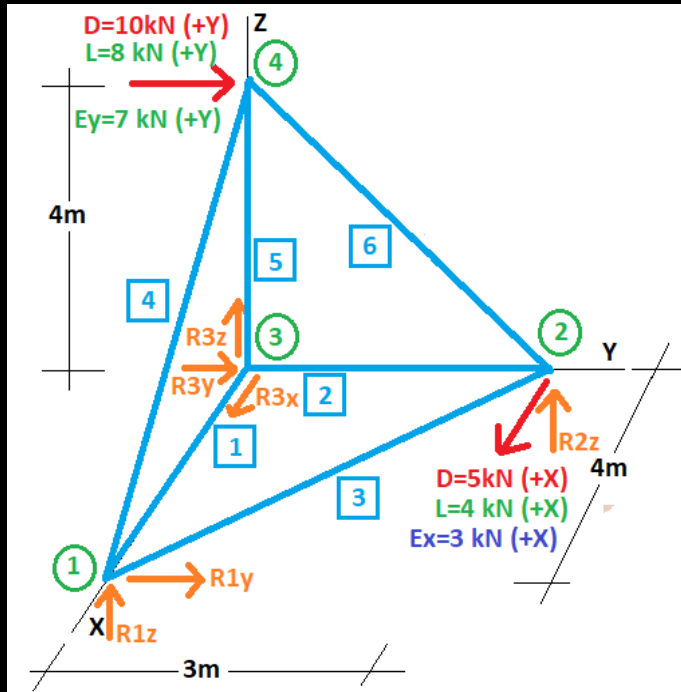
3. ECUACIÓN MATRICIAL LOCAL 3D



$$\begin{Bmatrix} r_{12}^{x'} \\ r_{12}^{y'} = 0 \\ r_{12}^{z'} = 0 \\ r_{21}^{x'} \\ r_{21}^{y'} = 0 \\ r_{21}^{z'} = 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^{x'} \\ p_1^{y'} \\ p_1^{z'} \\ p_2^{x'} \\ p_2^{y'} \\ p_2^{z'} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ w'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \\ w'_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} emp_1^{x'} \\ 0 \\ 0 \\ emp_2^{x'} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



3. ECUACIÓN MATRICIAL LOCAL 3D



[k'] [KN/cm]					
u'1	v'1	w'1	u'3	v'3	w'3
5	0	0	-5	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
-5	0	0	5	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

{r'} [KN]	
	D
rx'13	-5
ry'13	0
rz'13	0
rx'31	5
ry'31	0
rz'31	0

{r'}	
	D
rx'32	-13.75
ry'32	0
rz'32	0
rx'23	13.75
ry'23	5
rz'23	0

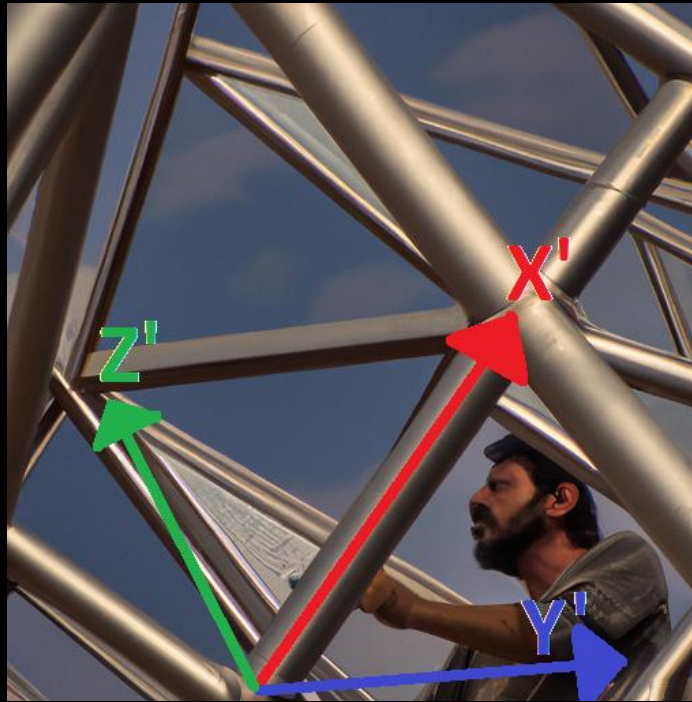
{p'}	
	D

{d'}	
	D
u'3	0
v'3	0
w'3	0
u'2	2.0625
v'2	-4.5
w'2	0

$$\begin{Bmatrix} r_{12}^{x'} \\ r_{12}^{y'} = 0 \\ r_{12}^{z'} = 0 \\ r_{21}^{x'} \\ r_{21}^{y'} = 0 \\ r_{21}^{z'} = 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^{x'} \\ p_1^{y'} \\ p_1^{z'} \\ p_2^{x'} \\ p_2^{y'} \\ p_2^{z'} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ w'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \\ w'_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} emp_1^{x'} \\ 0 \\ 0 \\ emp_2^{x'} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



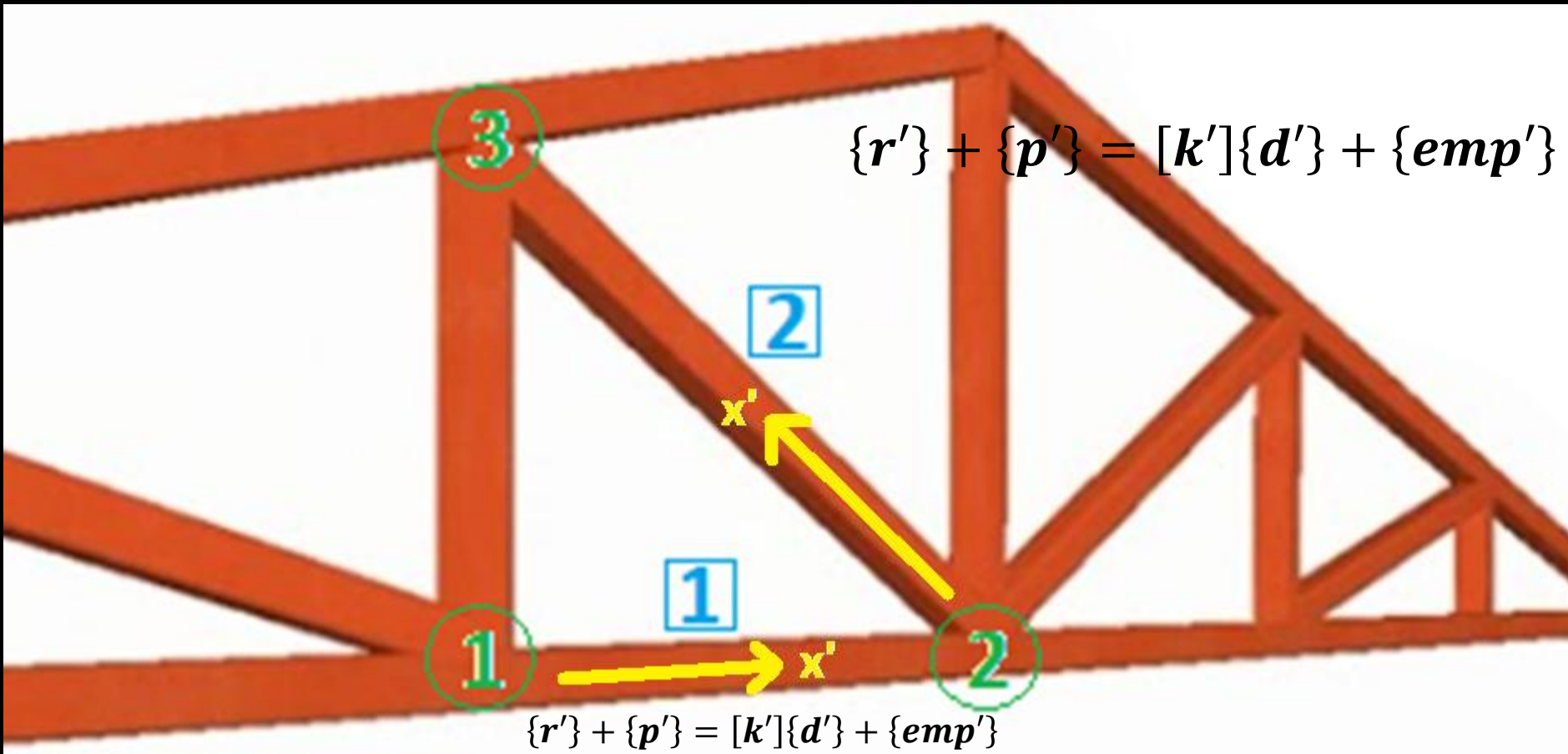
3. ECUACIÓN MATRICIAL LOCAL 3D



$$\begin{Bmatrix} r_{12}^{x'} \\ r_{12}^{y'} = 0 \\ r_{12}^{z'} = 0 \\ r_{21}^{x'} \\ r_{21}^{y'} = 0 \\ r_{21}^{z'} = 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^{x'} \\ p_1^{y'} \\ p_1^{z'} \\ p_2^{x'} \\ p_2^{y'} \\ p_2^{z'} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ w'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \\ w'_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} emp_1^{x'} \\ 0 \\ 0 \\ emp_2^{x'} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3. ECUACIÓN MATRICIAL LOCAL 3D

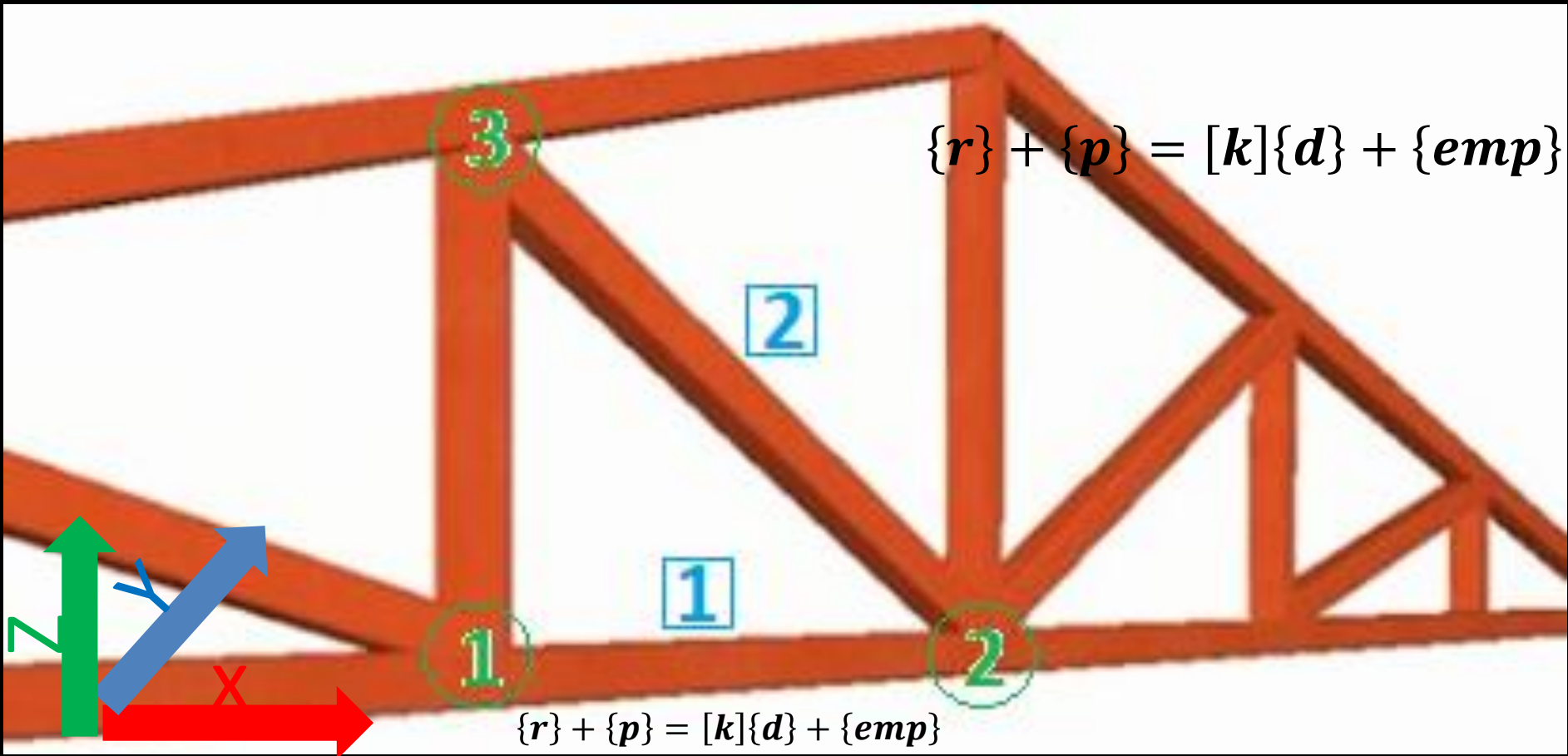
ECUACIONES: UNA POR CADA ELEMENTO



3. ECUACIÓN MATRICIAL LOCAL 3D

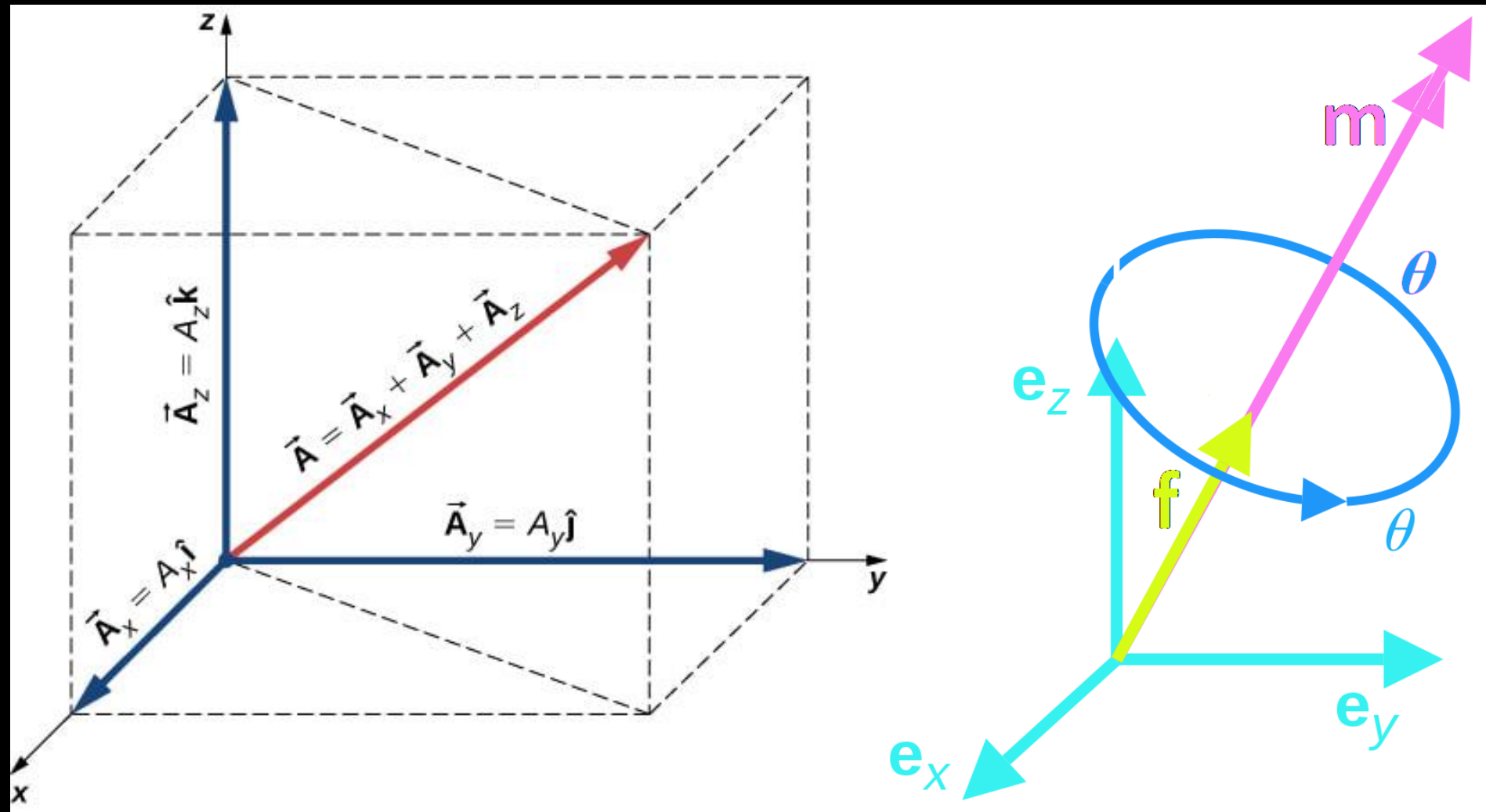
ECUACIONES: UNA POR CADA ELEMENTO

AHORA EN COORDENADAS GLOBALES



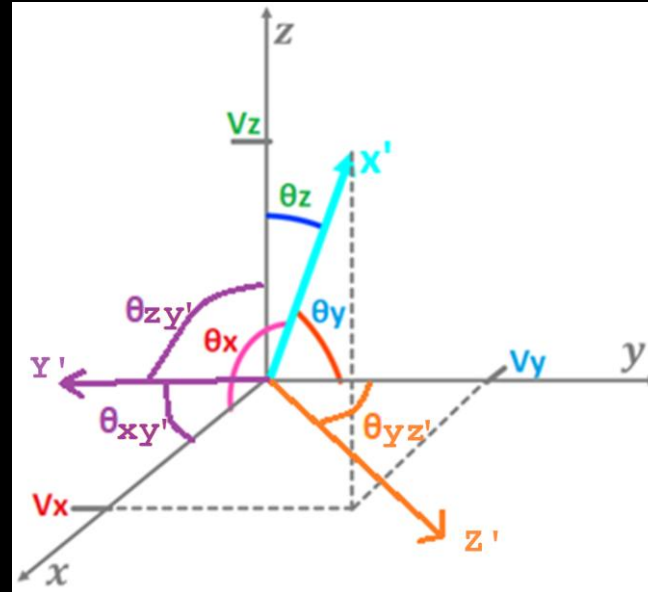
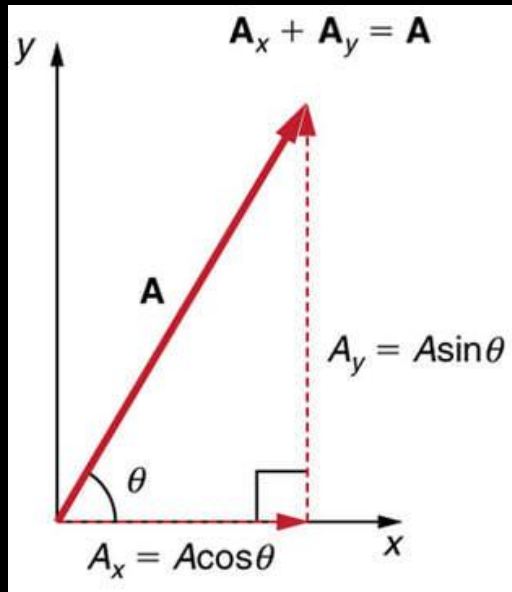
4. ROTACIÓN

ROTACIÓN DE VECTORES EN 3D



4. ROTACIÓN

ROTACIÓN DE VECTORES EN 3D



$$\{v\} = [T_o] \{v'\}$$

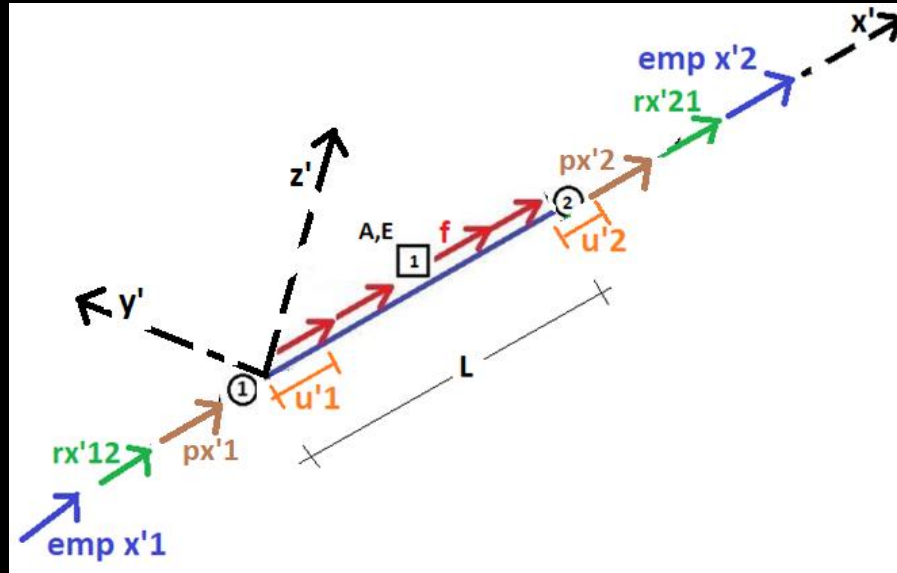
$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \text{COS} \left[\text{Image of a student studying} \right] \begin{Bmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{Bmatrix}$$

4. ROTACIÓN

ROTACIÓN DE VECTORES EN 3D

$$\begin{Bmatrix} p_1^{x'} \\ p_2^{x'} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} r'_{12} \\ r'_{21} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} emp_1^{x'} \\ emp_2^{x'} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} [v_{12}] \\ [v_{21}] \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_o] & [0] \\ [0] & [T_o] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [v'_{12}] \\ [v'_{21}] \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} [v_{12}] \\ [v_{21}] \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} [v'_{12}] \\ [v'_{21}] \end{Bmatrix}$$

4. ROTACIÓN

ECUACIONES MATRICIALES LOCALES 3D EN COORDENADAS GLOBALES

$$\{r\}^i + \{p\}^i = [k]^i \{d\}^i + \{emp\}^i$$

$$\begin{Bmatrix} r_{12}^x \\ r_{12}^y \\ r_{12}^z \\ r_{21}^x \\ r_{21}^y \\ r_{21}^z \end{Bmatrix}^i + \begin{Bmatrix} p_1^x \\ p_1^y \\ p_1^z \\ p_2^x \\ p_2^y \\ p_2^z \end{Bmatrix}^i = [k]^i \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix}^i + \begin{Bmatrix} emp_1^x \\ emp_1^y \\ emp_1^z \\ emp_2^x \\ emp_2^y \\ emp_2^z \end{Bmatrix}^i$$

4. ROTACIÓN

ROTACIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ LOCAL EN COORDENADAS LOCALES

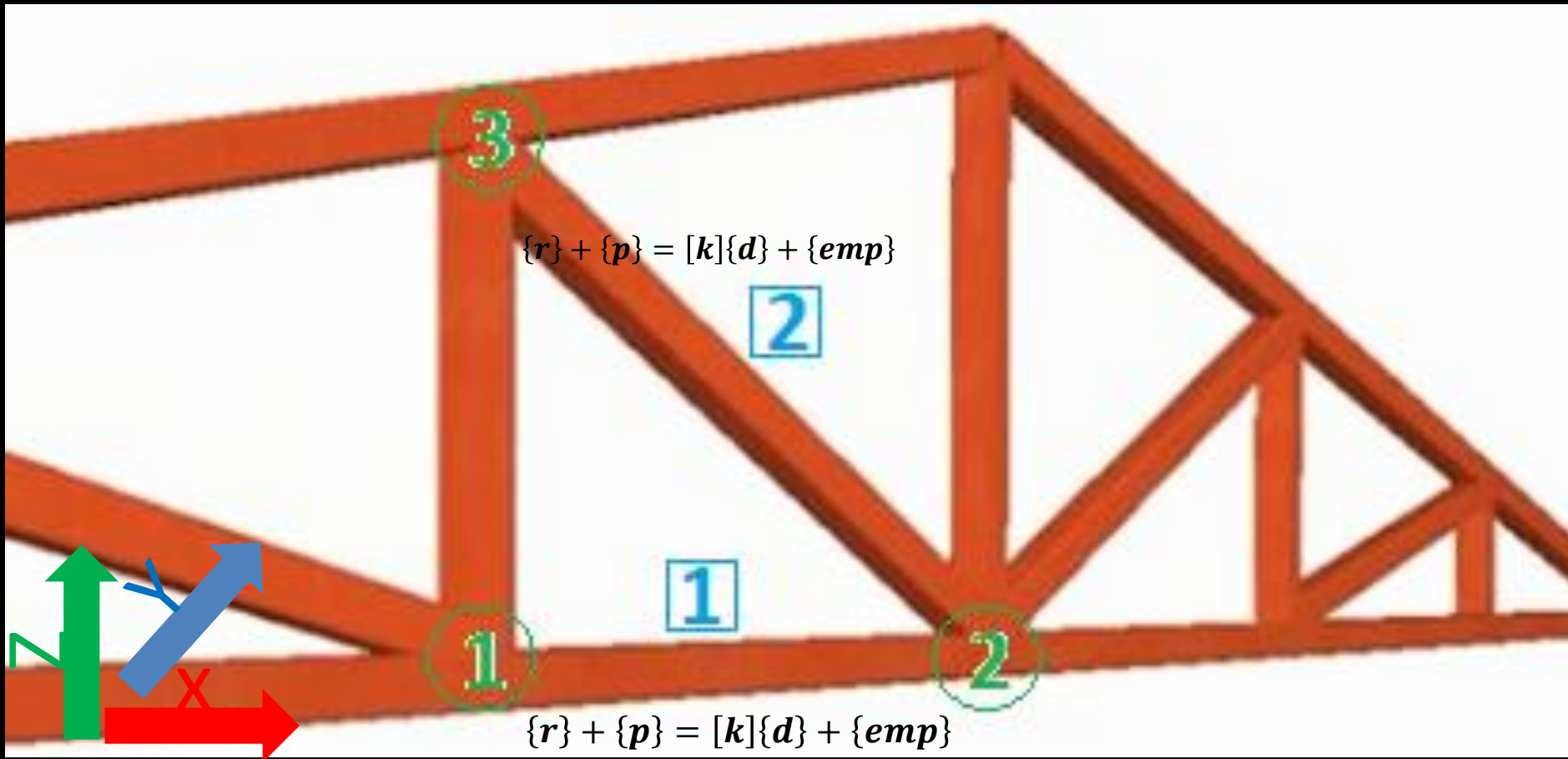
$$r' + p' = k'd' + emp'$$



$$r + p = [k]d + emp$$

5. ENSAMBLAJE

ENSAMBLAJE DE ECUACIONES MATRICIALES LOCALES EN COORDENADAS GLOBALES



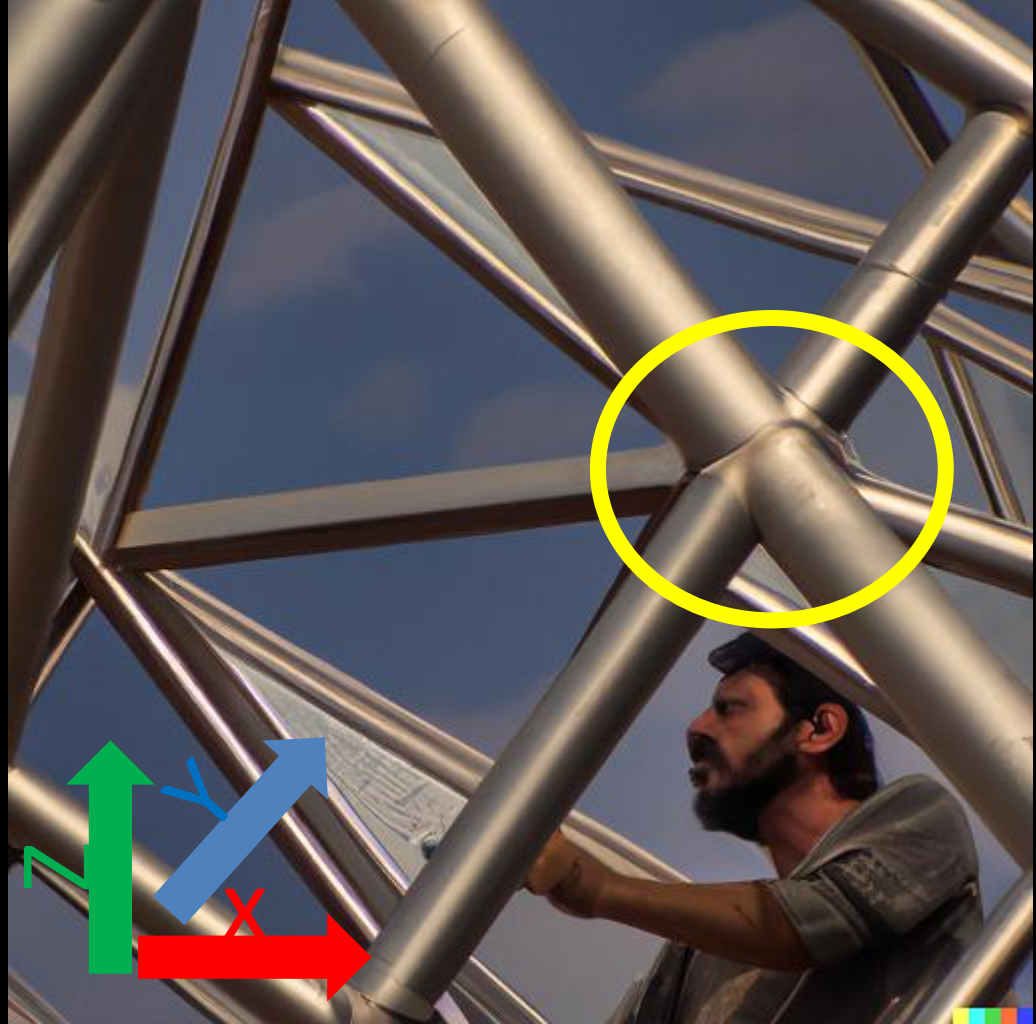
5. ENSAMBLAJE

ENSAMBLAJE DE ECUACIONES MATRICIALES LOCALES EN COORDENADAS GLOBALES

$$\sum \{r\}_i$$

$$\sum \{p\}_i$$

$$\sum \{emp\}_i$$



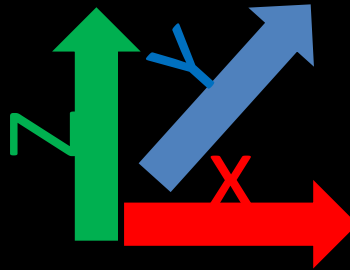
5. ENSAMBLAJE

ENSAMBLAJE DE ECUACIONES MATRICIALES LOCALES EN COORDENADAS GLOBALES

$$\sum \{r\}_i$$

$$\sum \{p\}_i$$

$$\sum \{emp\}_i$$



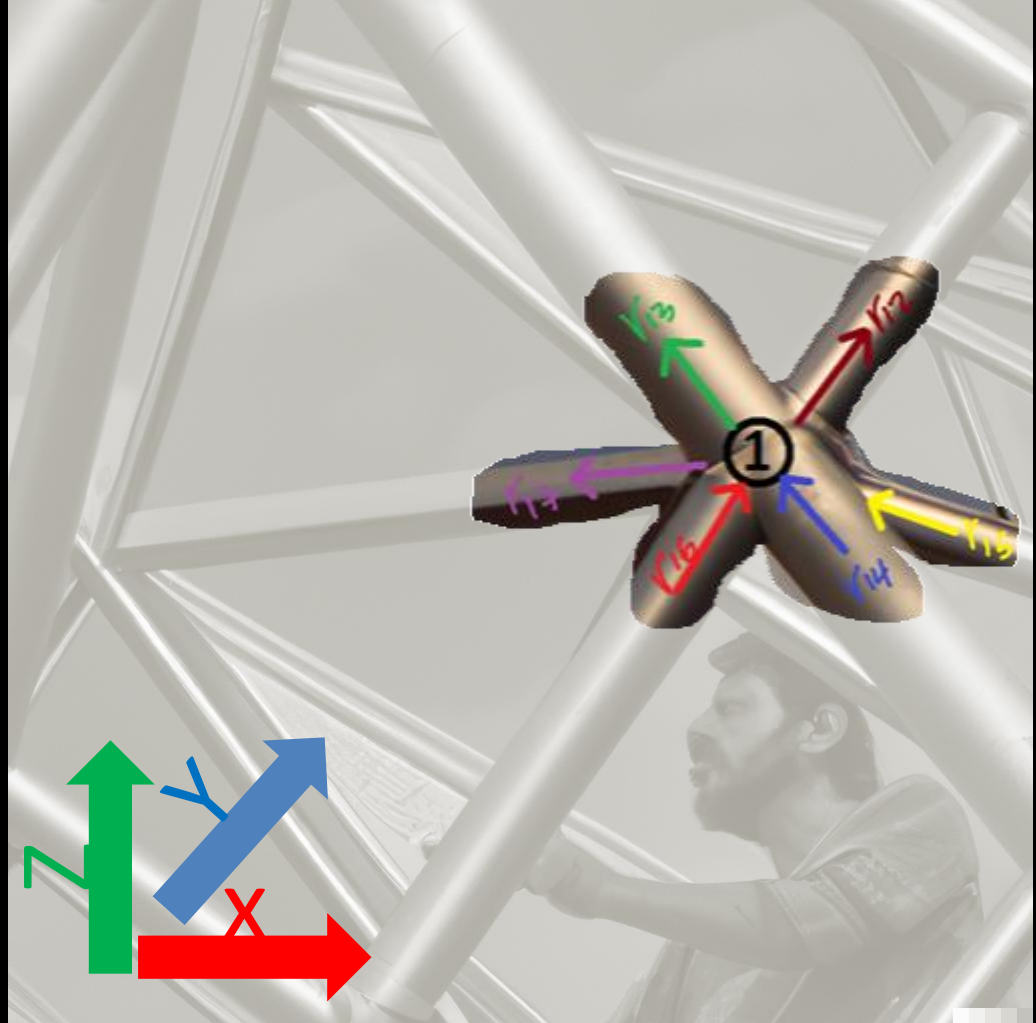
5. ENSAMBLAJE

ENSAMBLAJE DE ECUACIONES MATRICIALES LOCALES EN COORDENADAS GLOBALES

$$\sum \{r\}_i$$

$$\sum \{p\}_i$$

$$\sum \{emp\}_i$$

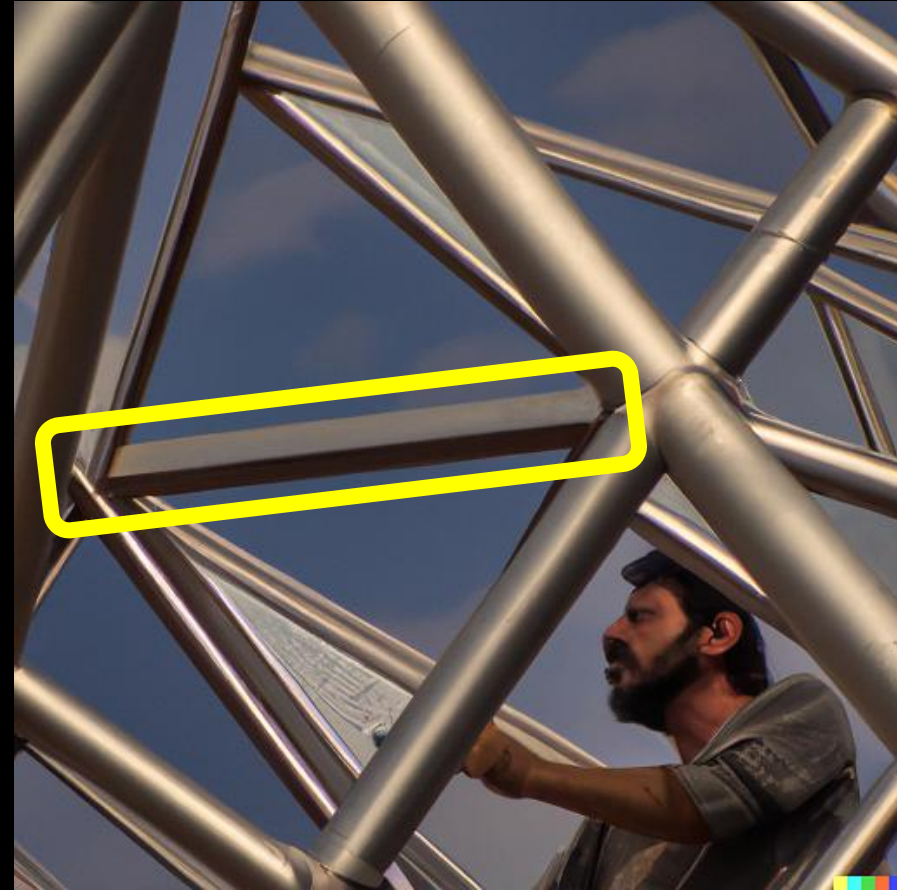


5. ENSAMBLAJE

ENSAMBLAJE DE ECUACIONES MATRICIALES LOCALES EN COORDENADAS GLOBALES

$$K_i = \left(\frac{AE}{L} \right)_i \begin{bmatrix} \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} \\ \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} \\ \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} \\ \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} \\ \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} \\ \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_{ini} \\ v'_{ini} \\ w'_{ini} \\ u'_{fin} \\ v'_{fin} \\ w'_{fin} \end{Bmatrix}$$

$$K_i = \begin{bmatrix} K_i^{11} & K_i^{12} \\ K_i^{21} & K_i^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{ini} \\ d_{fin} \end{Bmatrix}$$

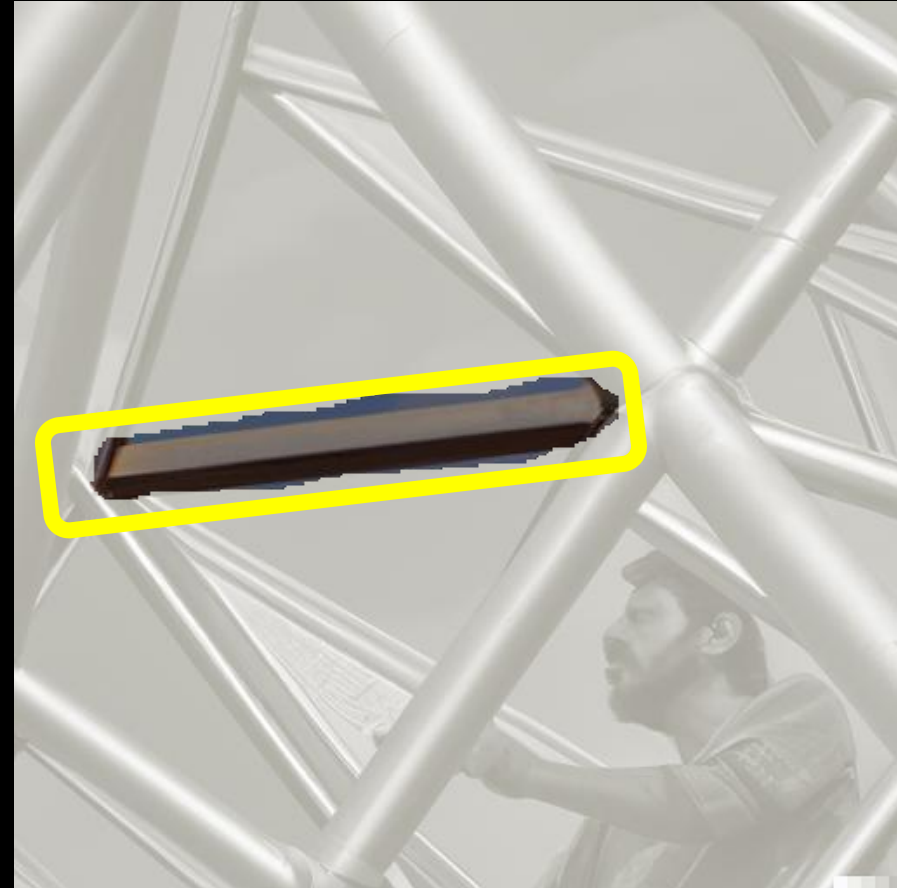


5. ENSAMBLAJE

ENSAMBLAJE DE ECUACIONES MATRICIALES LOCALES EN COORDENADAS GLOBALES

$$K_i = \left(\frac{AE}{L} \right)_i \begin{bmatrix} \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} \\ \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} \\ \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} \\ \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} \\ \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} \\ \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} & \text{#} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_{ini} \\ v'_{ini} \\ w'_{ini} \\ u'_{fin} \\ v'_{fin} \\ w'_{fin} \end{Bmatrix}$$

$$K_i = \begin{bmatrix} K_i^{11} & K_i^{12} \\ K_i^{21} & K_i^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{ini} \\ d_{fin} \end{Bmatrix}$$

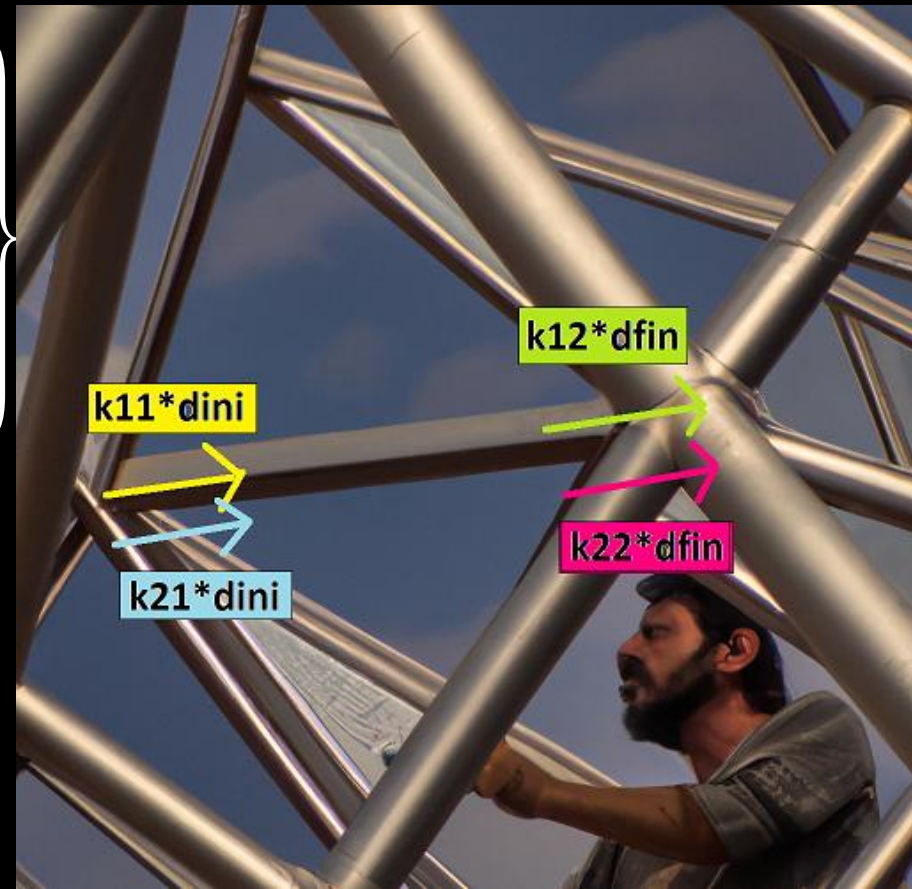


5. ENSAMBLAJE

ENSAMBLAJE DE ECUACIONES MATRICIALES LOCALES EN COORDENADAS GLOBALES

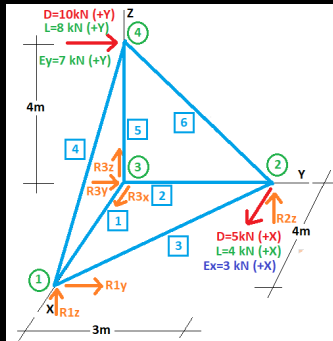
$$K_i = \left(\frac{AE}{L} \right)_i \begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_{ini} \\ v'_{ini} \\ w'_{ini} \\ u'_{fin} \\ v'_{fin} \\ w'_{fin} \end{Bmatrix}$$

$$K_i = \begin{bmatrix} K_i^{11} & K_i^{12} \\ K_i^{21} & K_i^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{ini} \\ d_{fin} \end{Bmatrix}$$



5. ENSAMBLAJE

ENSAMBLAJE DE ECUACIONES MATRICIALES LOCALES EN COORDENADAS GLOBALES



[k] [KN/cm]					
u'1	v'1	w'1	u'3	v'3	w'3
5	0	0	-5	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
-5	0	0	5	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

MATRICES AGRANDADAS DEL ELEMENTO 1

n	[K]											
	1			2			3			4		
	u1	v1	w1	u2	v2	w2	u3	v3	w3	u4	v4	w4
1	5	0	0	0	0	0	-5	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-5	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



5. ENSAMBLAJE

ECUACIÓN MATRICIAL GLOBAL

$$\{R\} + \{P\} = [K]\{D\} + \{EMP\}$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{n-1} \\ R_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1,n-1} & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2,n-1} & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ K_{n-1,1} & K_{n-1,2} & \dots & K_{n-1,n-1} & K_{n-1,n} \\ K_{n1} & K_{n,2} & \dots & K_{n,n-1} & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{n-1} \\ D_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} EMP_1 \\ EMP_2 \\ \vdots \\ EMP_{n-1} \\ EMP_n \end{Bmatrix}$$

6. SOLUCIÓN

SUBESTRUCTURACIÓN DE LA ECUACIÓN MATRICIAL GLOBAL

$$\{R\} + \{P\} = [K]\{D\} + \{EMP\}$$

$$\begin{Bmatrix} R_a \\ R_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_a \\ P_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_a \\ D_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} EMP_a \\ EMP_b \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_a = \{0\} \\ R_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_a \\ P_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_a \\ D_b = \{0\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} EMP_a \\ EMP_b \end{Bmatrix}$$



6. SOLUCIÓN

SUBESTRUCTURACIÓN DE LA ECUACIÓN MATRICIAL GLOBAL

$$\{R\} + \{P\} = [K]\{D\} + \{EMP\}$$

$$\begin{Bmatrix} \{0\} \\ R_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_a \\ P_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} \\ K_{ba} \end{bmatrix} \{D_a\} + \begin{Bmatrix} EMP_a \\ EMP_b \end{Bmatrix}$$

$$\{0\} + \{P_a\} = [K_{aa}]\{D_a\} + \{EMP_a\}$$

$$\{R_b\} + \{P_b\} = [K_{ba}]\{D_a\} + \{EMP_b\}$$

6. SOLUCIÓN

SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN ECUACIÓN MATRICIAL GLOBAL

$$\{P_a\} = [K_{aa}]\{D_a\} + \{EMP_a\}$$

$$[K_{aa}]\{D_a\} = \{P_a\} - \{EMP_a\}$$

$$[K_{aa}]^{-1}[K_{aa}]\{D_a\} = [K_{aa}]^{-1}(\{P_a\} - \{EMP_a\})$$

$$\{D_a\} = [K_{aa}]^{-1}(\{P_a\} - \{EMP_a\})$$

$$\{R_b\} = [K_{ba}]\{D_a\} + \{EMP_b\} - \{P_b\}$$



Gracias

Michel Bolaños Guerrero, PhD

Créditos a:

<https://openai.com/dall-e-2> - <https://aminoapps.com/>

<https://miprofe.com/>

<https://www.youtube.com/@EASYCTE>



Facultad de Ingeniería - Especialización en Estructuras

<https://michel.udenar.edu.co/> - michel@udenar.edu.co

Universidad de Nariño

[ini](#) [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [fin](#)