# ESPECIALIZACIÓN EN ESTRUCTURAS
# ANÁLISIS ESTRUCTURAL AVANZADO

# ELEMENTOS UNIDIMENSIONALES
# ESFUERZOS COMBINADOS

**Michel Bolaños Guerrero**
**Ing. Civil, Especialista en Estructuras,**
**Magister en Ingeniería – Énfasis en Ingeniería Civil,**
**Doctor en Ingeniería – Énfasis en Mecánica de Sólidos**

2025-B

# ELEMENTOS UNIDIMENSIONALES

## ESFUERZOS COMBINADOS

0. Esfuerzo axial puro.

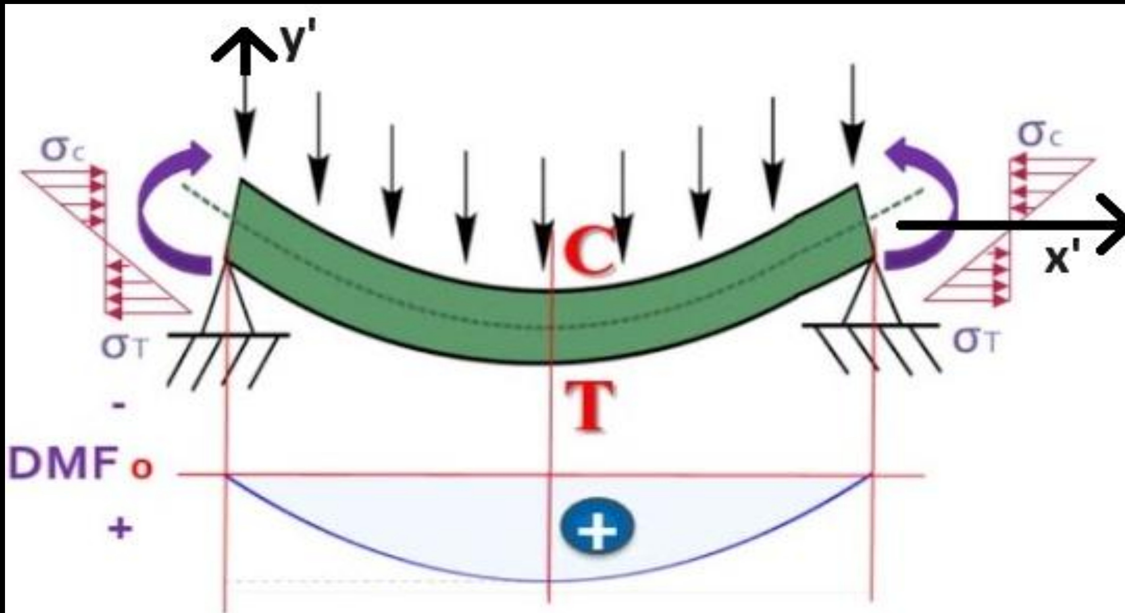
1. Flexión pura x’y’.

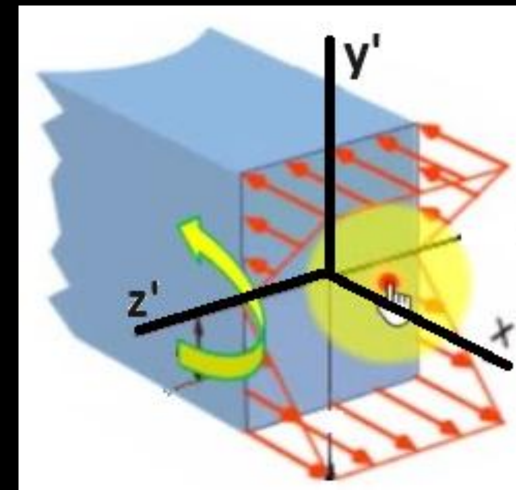
2. Flexión pura z’x’.

3. Torsión pura.

4. Flexo-tensión-torsión 3D.

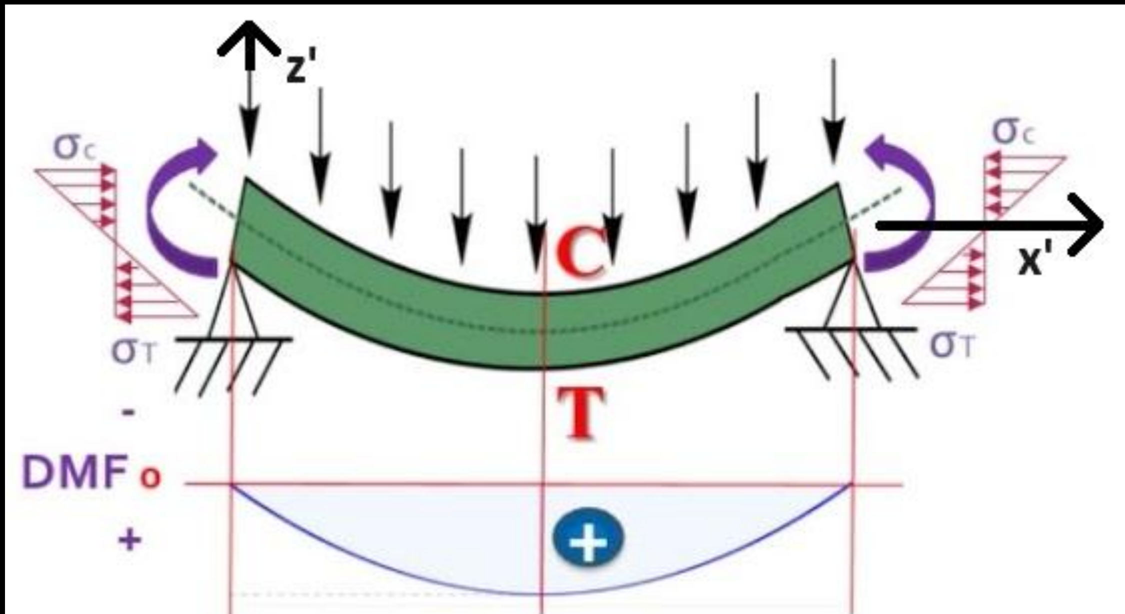
# 1. FLEXIÓN PURA X'Y' o Z'

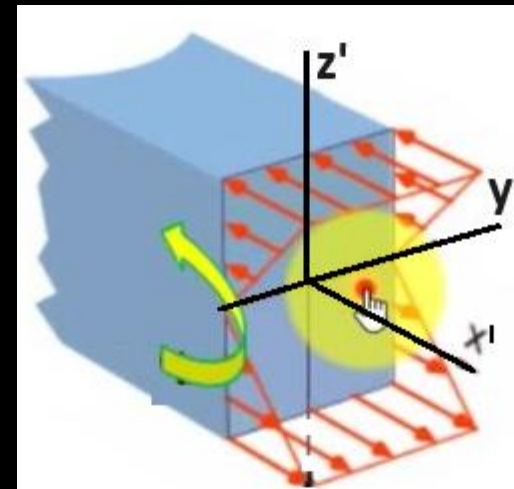



$$\begin{Bmatrix} ry'_{12} \\ mz'_{12} \\ ry'_{21} \\ mz'_{21} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^{y'} \\ p_1^{mz'} \\ p_2^{y'} \\ p_2^{mz'} \end{Bmatrix} = \frac{EI_{z'}}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v'_1 \\ \theta_1^{z'} \\ v'_2 \\ \theta_2^{z'} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} emp_1^{y'} \\ emp_1^{mz'} \\ emp_2^{y'} \\ emp_2^{mz'} \end{Bmatrix}$$

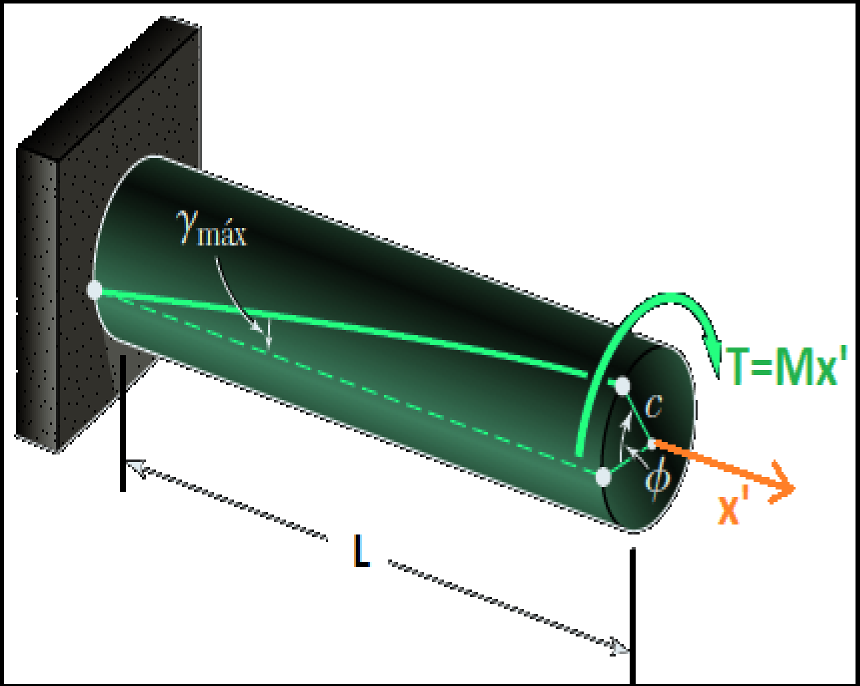
# 2. FLEXIÓN PURA Z’X’ o Y’




$$
\begin{Bmatrix} rz'_{12} \\ my'_{12} \\ rz'_{21} \\ my'_{21} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^{z'} \\ p_1^{my\prime} \\ p_2^{z'} \\ p_2^{my\prime} \end{Bmatrix} = \frac{EI_{y'}}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 4 & \frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 2 & \frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w'_1 \\ \theta_1^{y'} \\ w'_2 \\ \theta_2^{y'} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} emp_1^{z'} \\ emp_1^{my\prime} \\ emp_2^{z'} \\ emp_2^{my\prime} \end{Bmatrix}
$$

# 3. TORSIÓN PURA




$$M^{x'} = \frac{GJ}{L}\theta^{x'}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

*Solo circular:*

$$J = J_o = \int_A r^2 dA$$

*Solo cuadrada:*

$$J = 0.80295 J_o$$

*Solo rectangular b<h:*

$$J = \frac{1}{3}b^3 h\left[1 - \frac{192b}{h\pi^5}\sum_{k=1,3\ldots}^{\infty}\frac{1}{k^5}\tanh\frac{kh\pi}{2b}\right]$$

## ECUACIÓN MATRICIAL LOCAL 1D EN COORDENADAS LOCALES

$$\{r'\} + \{p'\} = [k']\{d'\} + \{emp'\}$$

$$\begin{Bmatrix} r_{12}^{x'} \\ r_{21}^{x'} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^{mx'} \\ p_2^{mx'} \end{Bmatrix} = \frac{GJ}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1^{x'} \\ \theta_2^{x'} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} emp_1^{mx'} \\ emp_2^{mx'} \end{Bmatrix}$$

# 4. FLEXO-TENSIÓN-TORSIÓN 3D

## ECUACIONES MATRICIALES LOCALES 3D EN COORDENADAS LOCALES

$$\{r'\}^i + \{p'\}^i = [k']^i\{d'\}^i + \{emp'\}^i$$

$$\begin{Bmatrix} x'1 \\ y'1 \\ z'1 \\ Mx'1 \\ My'1 \\ Mz'1 \\ x'2 \\ y'2 \\ z'2 \\ Mx'2 \\ My'2 \\ Mz'2 \end{Bmatrix}^i + \{p'\}^i = [\quad]^i \begin{Bmatrix} u'1 \\ v'1 \\ w'1 \\ \theta x'1 \\ \theta y'1 \\ \theta z'1 \\ u'2 \\ v'2 \\ w'2 \\ \theta x'2 \\ \theta y'2 \\ \theta z'2 \end{Bmatrix}^i + \{emp'\}^i$$

# 4. FLEXO-TENSIÓN-TORSIÓN 3D

## ECUACIONES MATRICIALES LOCALES 3D EN COORDENADAS GLOBALES

$$\{r\}^i + \{p\}^i = [k]^i\{d\}^i + \{emp\}^i$$

$$\begin{Bmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \\ Mx1 \\ My1 \\ Mz1 \\ x2 \\ y2 \\ z2 \\ Mx2 \\ My2 \\ Mz2 \end{Bmatrix}^i + \{p\}^i =$$

$$\begin{Bmatrix} u1 \\ v1 \\ w1 \\ \theta x1 \\ \theta y1 \\ \theta z1 \\ u2 \\ v2 \\ w2 \\ \theta x2 \\ \theta y2 \\ \theta z2 \end{Bmatrix}^i + \{emp\}^i$$

# 4. FLEXO-TENSIÓN-TORSIÓN 3D

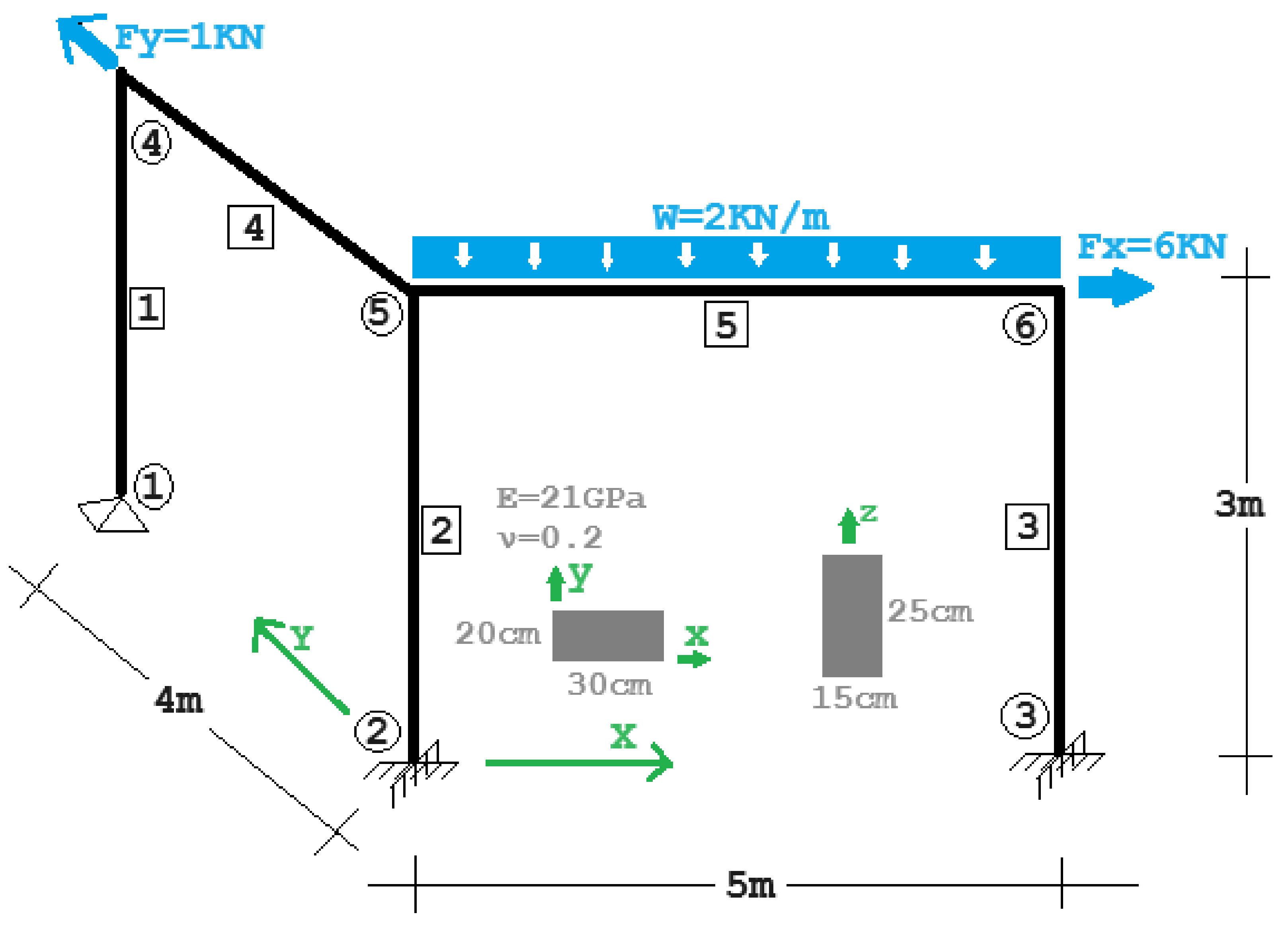
## ENSAMBLAJE DE ECUACIÓNES MATRICIALES LOCALES EN COORDENADAS GLOBALES

## ECUACIÓN MATRICIAL DE LA ESTRUCTURA

$$\{R\}+\{P\}=[K]\{D\}+\{EMP\}$$

$$\begin{Bmatrix} X1 \\ Y1 \\ Z1 \\ Mx1 \\ My1 \\ Mz1 \\ X2 \\ Y2 \\ Z2 \\ Mx2 \\ My2 \\ Mz2 \end{Bmatrix} + \{P\} = [K] \begin{Bmatrix} u1 \\ v1 \\ w1 \\ \theta x1 \\ \theta y1 \\ \theta z1 \\ u2 \\ v2 \\ w2 \\ \theta x2 \\ \theta y2 \\ \theta z2 \end{Bmatrix} + \{EMP\}$$

# 4. FLEXO-TENSIÓN-TORSIÓN 3D



# Gracias

## Michel Bolaños Guerrero, PhD

**Créditos a:**
https://openai.com/dall-e-2
https://aminoapps.com/
https://miprofe.com/
https://www.youtube.com/@EASYCTE -