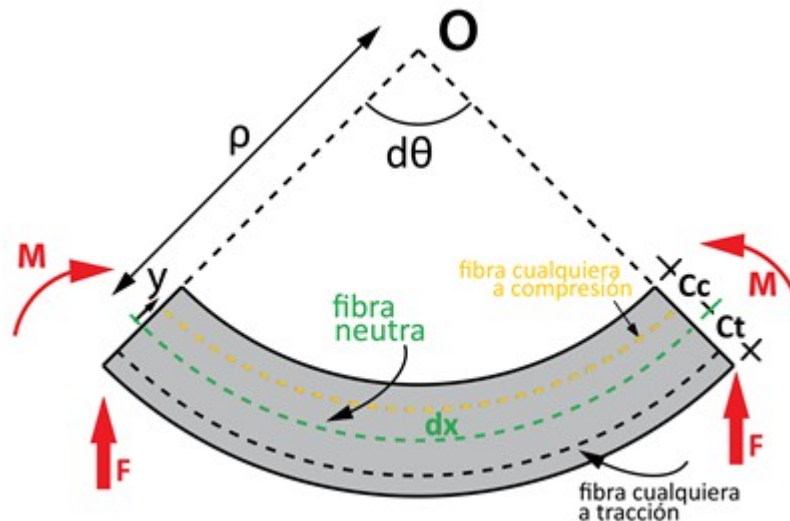


#1: [CaseMode := Sensitive, InputMode := Word]

Extraemos un diferencial para el análisis:



Longitud inicial del diferencial en un punto x de la viga:

$$\#2: \quad \partial(x) = \rho \cdot \partial(\theta)$$

Longitud deformada de la fibra a tensión ("abajo" en el lado negativo del eje), o compresión ("arriba" en el lado positivo del eje):

$$\#3: \quad \partial(x) + \partial(u) = (\rho - y) \cdot \partial(\theta)$$

eje y "arriba" en el lado positivo del eje y con du a compresión, du resultará negativo
Deformación de la fibra a tensión (du positivo) o compresión (du negativo):

$$\#4: \quad \left[\begin{array}{l} \partial(u) = (\rho - y) \cdot \partial(\theta) - \partial(x) \\ \partial(u) = (\rho - y) \cdot \partial(\theta) - \rho \cdot \partial(\theta) \\ \partial(u) = -y \cdot \partial(\theta) \end{array} \right]$$

Deformación unitaria en el punto x de la longitud y en una fibra y de la viga:

$$\#5: \quad [\varepsilon(x, y) :=, \sigma(x, y) :=]$$

$$\#6: \quad \left[\begin{array}{l} \varepsilon(x, y) = \frac{\partial(u)}{\partial(x)} \\ \varepsilon(x, y) = -\frac{y \cdot \partial(\theta)}{\rho \cdot \partial(\theta)} \\ \varepsilon(x, y) = -\frac{y}{\rho} \end{array} \right]$$

Con la aplicación de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, las secciones planas antes de la deformación permanecerán planas una vez deformadas.
Esta situación se resume geométricamente que la deformación de las fibras responderán a una relación lineal frente a la deformación de las fibras con máxima deformación en los extremos.

https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Bernoulli_beam_theory

#7: $[\epsilon_{\max C} = \epsilon(x, C_c), \epsilon_{\max T} = \epsilon(x, C_t)]$

Fibra extrema a compresión, ubicada a una distancia y "arriba" del eje neutro y será negativa: C_c .

Fibra extrema a tracción ubicada a una distancia y "abajo" del eje neutro y será positiva: C_t .

#8:
$$\left[\begin{array}{l} \epsilon_{\max C} = \epsilon(x, C_c) \quad \epsilon_{\max T} = \epsilon(x, C_t) \\ \frac{\epsilon(x, y)}{y} = \frac{\epsilon_{\max C}}{C_c} \quad \frac{\epsilon(x, y)}{y} = \frac{\epsilon_{\max T}}{C_t} \\ \epsilon(x, y) = \frac{y}{C_c} \cdot \epsilon_{\max C} \quad \epsilon(x, y) = \frac{y}{C_t} \cdot \epsilon_{\max T} \end{array} \right]$$

#9:
$$\left[\begin{array}{l} \epsilon_{\max C} = \frac{C_c}{y} \cdot \epsilon(x, y) \quad \epsilon_{\max T} = \frac{C_t}{y} \cdot \epsilon(x, y) \\ \epsilon_{\max C} = \frac{C_c}{y} \cdot \left(-\frac{y}{\rho} \right) \quad \epsilon_{\max T} = \frac{C_t}{y} \cdot \left(-\frac{y}{\rho} \right) \\ \epsilon_{\max C} = -\frac{C_c}{\rho} \quad \epsilon_{\max T} = -\frac{C_t}{\rho} \end{array} \right]$$

Relación esfuerzo con deformaciones unitarias:

El material se mantiene en el rango de aplicación de la Ley de la Elasticidad de Hooke, es decir en el rango elástico con un comportamiento lineal entre los esfuerzos y las deformaciones unitarias.

Si la deformación unitaria es positiva, es decir con alargamientos, el esfuerzo será positivo, es decir de tracción.

Si la deformación unitaria es negativa, es decir con acortamientos, el esfuerzo será negativo, es decir de compresión.

https://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_elasticidad_de_Hooke

#10:
$$\left[\sigma(x, y) = E \cdot \epsilon(x, y), \epsilon(x, y) = \frac{\sigma(x, y)}{E} \right]$$

Para fibras ubicadas a una distancia y positiva "arriba" del eje neutro, los esfuerzos resultarán negativos porque la deformación unitaria máxima $\epsilon_{\max C}$ es negativa.

Para fibras ubicadas a una distancia y negativa "abajo" del eje neutro, los esfuerzos resultarán positivos porque la deformación unitaria máxima $\epsilon_{\max T}$ es positiva.

Por equilibrio de fuerzas de la sección, con $\sum F_x = 0$, integramos en toda el área los esfuerzos:

$$\#11: \begin{bmatrix} \int \sigma(x, y) dA = 0 \\ E \cdot \int \varepsilon(x, y) dA = 0 \\ E \cdot \int -\frac{y}{\rho} dA = 0 \\ -\frac{E}{\rho} \cdot \int y dA = 0 \end{bmatrix}$$

La integración del esfuerzo muestra que el eje x debe ser un eje centroidal, dado que $\int y dA = 0$:

$$\#12: \begin{bmatrix} \int y dA = 0 \\ \int \int y dy dx = 0 \\ \int y dy = 0 \end{bmatrix}$$

Por equilibrio de momentos alrededor del eje Z, es decir fuerzas axiales en el eje x en cada diferencial, por su brazo y, sumado al momento interno M_z de la sección sumarán cero:

El momento interno M_z tiene el valor del denominado momento flector, pero su signo depende de otra convención.

Es de recordar que al otro lado del corte del diagrama de cuerpo libre del diferencial, el Momento interno M_z es igual, pero de sentido contrario.

$$\#13: \begin{bmatrix} \sigma(x, y) = E \cdot \left(\frac{y}{C_c} \cdot \varepsilon_{\max C} \right) & \sigma(x, y) = E \cdot \left(\frac{y}{C_t} \cdot \varepsilon_{\max T} \right) \\ \sigma(x, C_c) = E \cdot \varepsilon_{\max C} & \sigma(x, C_t) = E \cdot \varepsilon_{\max T} \\ \sigma_{\max C} = E \cdot \varepsilon_{\max C} & \sigma_{\max T} = E \cdot \varepsilon_{\max T} \end{bmatrix}$$

$$\#14: \begin{bmatrix} \sigma(x, y) = E \cdot \left(\frac{y}{C_c} \cdot \varepsilon_{\max C} \right) & \sigma(x, y) = E \cdot \left(\frac{y}{C_t} \cdot \varepsilon_{\max T} \right) \\ \sigma(x, C_c) = E \cdot \varepsilon_{\max C} & \sigma(x, C_t) = E \cdot \varepsilon_{\max T} \end{bmatrix}$$

$$\#15: \int \sigma(x, y) dA = E \cdot \int \frac{y}{C_c} \cdot \varepsilon_{\max C} dA$$

Los **esfuerzos** de compresión y tracción en la misma sección simétrica ubicada en un punto x del eje neutro, integrados son **fuerzas** iguales de compresión y tracción ubicadas en sus respectivos centroides y separadas entre ellas en un brazo J, las que se pueden representar como una fuerza-par o como un momento, el cual es el denominado **momento flector MF(x)** de la sección. Adoptamos en el MF(x) será positivo si genera compresiones en la fibra "superior" y tracciones en la fibra "inferior".

$$\#16: MF_z(x) :=$$



$MF(x) = F_c \cdot J$ y las fuerzas F , sean de compresión o tracción, son la integración de los esfuerzos σ :

$$\#17: \left[\begin{array}{l} MF_z(x) = \int y \cdot (-\sigma(x, y)) dA = 0 \\ MF_z(x) = - \int y \cdot \sigma(x, y) dA \\ MF_z \cdot x = - \int y \cdot E \cdot \varepsilon(x, y) dA \end{array} \right]$$

$$\#18: \left[\begin{array}{l} MF_z(x) = - \int y \cdot E \cdot \left(\frac{y}{C_c} \cdot \varepsilon_{\max C} \right) dA \quad MF(x) = - \int y \cdot E \cdot \left(\frac{y}{C_t} \cdot \varepsilon_{\max T} \right) dA \\ MF_z(x) = - \frac{E}{C_c} \cdot \varepsilon_{\max C} \cdot \int y^2 dA \quad MF(x) = - \frac{E}{C_t} \cdot \varepsilon_{\max T} \cdot \int y^2 dA \end{array} \right]$$

Se debe tener en cuenta que la inercia centroidal alrededor del eje Z es $I_z = \int (y^2 \cdot dA)$.

$$\#19: \left[\begin{array}{l} MF_z(x) = - \frac{E \cdot I_z}{C_c} \cdot \varepsilon_{\max C} \quad MF_z(x) = - \frac{E \cdot I_z}{C_t} \cdot \varepsilon_{\max T} \\ MF_z(x) = - \frac{E \cdot I_z}{C_c} \cdot \left(\frac{C_c}{y} \cdot \varepsilon(x, y) \right) \quad MF_z(x) = - \frac{E \cdot I_z}{C_t} \cdot \left(\frac{C_t}{y} \cdot \varepsilon(x, y) \right) \\ MF_z(x) = - \frac{E \cdot I_z}{y} \cdot \varepsilon(x, y) \quad MF_z(x) = - \frac{E \cdot I_z}{y} \cdot \varepsilon(x, y) \\ MF_z(x) = - \frac{E \cdot I_z}{y} \cdot \frac{\sigma(x, y)}{E} \quad MF_z(x) = - \frac{E \cdot I_z}{y} \cdot \frac{\sigma(x, y)}{E} \end{array} \right]$$

$$\#20: \left[MF_z(x) = - \frac{I_z}{y} \cdot \sigma(x, y), \sigma(x, y) = - MF_z(x) \cdot \frac{y}{I_z} \right]$$