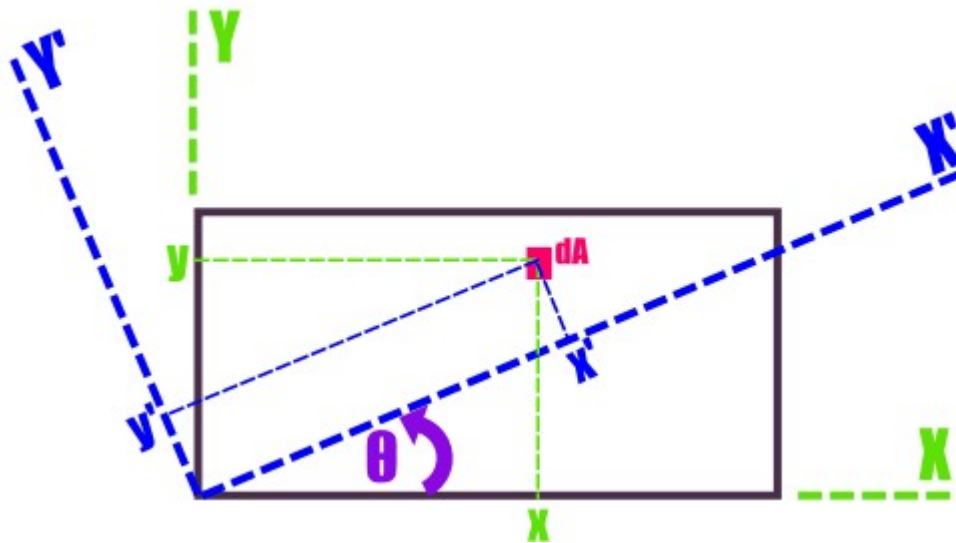


Inercias de ejes rotados



#1: [CaseMode := Sensitive, InputMode := Word]

Inercias a los ejes X e Y:

#2:
$$\left[I_x = \int y^2 dA, I_y = \int x^2 dA, I_{xy} = \int x \cdot y dA \right]$$

Se usará x_p como x' y y_p como y' :

#3:
$$\left[I_{xp} = \int y_p^2 dA, I_y = \int x_p^2 dA, I_{xpyp} = \int x_p \cdot y_p dA \right]$$

#4:
$$[x_p = x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta), y_p = -x \cdot \sin(\theta) + y \cdot \cos(\theta)]$$

Inercias usando las coordenadas rotadas:

#5:
$$\left[I_{xp} = \int (-x \cdot \sin(\theta) + y \cdot \cos(\theta))^2 dA, I_{yp} = \int (x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta))^2 dA, I_{xpyp} = \int (x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta)) \cdot (-x \cdot \sin(\theta) + y \cdot \cos(\theta)) dA \right]$$

#6:
$$\left[I_{xp} = \int (y^2 \cdot \cos^2(\theta) - 2 \cdot x \cdot y \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) + x^2 \cdot \sin^2(\theta)) dA, I_{yp} = \int (x^2 \cdot \cos^2(\theta) + 2 \cdot x \cdot y \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) + y^2 \cdot \sin^2(\theta)) dA, I_{xpyp} = \int (2 \cdot x \cdot y \cdot \cos^2(\theta) + (y^2 - x^2) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) - x \cdot y) dA \right]$$

#7:
$$\left[I_{xp} = \cos^2(\theta) \cdot \int y^2 dA - 2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \int x \cdot y dA + \sin^2(\theta) \cdot \int x^2 dA, I_{yp} = \right]$$

$$\cos^2(\theta) \cdot \int x^2 dA + 2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \int x \cdot y dA + \sin^2(\theta) \cdot \int y^2 dA, I_{xyp} =$$

$$2 \cdot \cos^2(\theta) \cdot \int x \cdot y dA + \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \left(\int y^2 dA - \int x^2 dA \right) - \int x \cdot y dA$$

#8:
$$\left[I_{xp} = \cos^2(\theta) \cdot I_x - 2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot I_{xy} + \sin^2(\theta) \cdot I_y, I_{yp} = \cos^2(\theta) \cdot I_y + \right.$$

$$\left. 2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot I_{xy} + \sin^2(\theta) \cdot I_x, I_{xyp} = 2 \cdot \cos^2(\theta) \cdot I_{xy} + \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot (I_x - I_y) - I_{xy} \right]$$

Uso de identidades trigonométricas:

#9:
$$\left[\begin{array}{l} \sin(2 \cdot \theta) = 2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \quad \cos(2 \cdot \theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \\ \cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2 \cdot \theta)}{2} \quad \sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2 \cdot \theta)}{2} \end{array} \right]$$

#10:
$$\left[\begin{array}{l} I_{xp} = \frac{1 + \cos(2 \cdot \theta)}{2} \cdot I_x - \sin(2 \cdot \theta) \cdot I_{xy} + \frac{1 - \cos(2 \cdot \theta)}{2} \cdot I_y \\ I_{yp} = \frac{1 + \cos(2 \cdot \theta)}{2} \cdot I_y + \sin(2 \cdot \theta) \cdot I_{xy} + \frac{1 - \cos(2 \cdot \theta)}{2} \cdot I_x \\ I_{xyp} = (1 + \cos(2 \cdot \theta)) \cdot I_{xy} + \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \theta) \cdot (I_x - I_y) - I_{xy} \end{array} \right]$$

Expresiones para inercias rotadas con ángulo doble:

#11:
$$\left[\begin{array}{l} I_{xp} = \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta) - I_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \theta) + \frac{I_x + I_y}{2} \\ I_{yp} = \frac{I_y - I_x}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta) + I_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \theta) + \frac{I_x + I_y}{2} \\ I_{xyp} = I_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin(2 \cdot \theta) \end{array} \right]$$

Derivamos e igualamos a cero para conocer las inercias máximas y mínimas:

$$\#12: \left[\begin{array}{l} \frac{d}{d\theta} I_{xp} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos(2\cdot\theta) - I_{xy} \cdot \sin(2\cdot\theta) + \frac{I_x + I_y}{2} \right) \\ \frac{d}{d\theta} I_{yp} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{I_y - I_x}{2} \cdot \cos(2\cdot\theta) + I_{xy} \cdot \sin(2\cdot\theta) + \frac{I_x + I_y}{2} \right) \\ \frac{d}{d\theta} I_{xyp} = \frac{d}{d\theta} \left(I_{xy} \cdot \cos(2\cdot\theta) + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin(2\cdot\theta) \right) \end{array} \right]$$

$$\#13: \left[\begin{array}{l} 0 = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos(2\cdot\theta) - I_{xy} \cdot \sin(2\cdot\theta) + \frac{I_x + I_y}{2} \right) \\ 0 = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{I_y - I_x}{2} \cdot \cos(2\cdot\theta) + I_{xy} \cdot \sin(2\cdot\theta) + \frac{I_x + I_y}{2} \right) \\ 0 = \frac{d}{d\theta} \left(I_{xy} \cdot \cos(2\cdot\theta) + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin(2\cdot\theta) \right) \end{array} \right]$$

Usamos $[\theta_{mx}, \theta_{my}, \theta_{mxy}]$ como el ángulo θ para que las funciones sean máximas y mínimas:

$$\#14: \left[\begin{array}{l} 0 = (I_y - I_x) \cdot \sin(2\cdot\theta_{mx}) - 2 \cdot I_{xy} \cdot \cos(2\cdot\theta_{mx}) \\ 0 = 2 \cdot I_{xy} \cdot \cos(2\cdot\theta_{my}) + (I_x - I_y) \cdot \sin(2\cdot\theta_{my}) \\ 0 = (I_x - I_y) \cdot \cos(2\cdot\theta_{mxy}) - 2 \cdot I_{xy} \cdot \sin(2\cdot\theta_{mxy}) \end{array} \right]$$

Despejamos θ_m :

$$\#15: \left[\begin{array}{l} \theta_{mx} = - \frac{\text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)}{2} - \frac{\pi}{2} \vee \theta_{mx} = \frac{\pi}{2} - \frac{\text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)}{2} \vee \\ \theta_{my} = - \frac{\text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)}{2} - \frac{\pi}{2} \vee \theta_{my} = \frac{\pi}{2} - \frac{\text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)}{2} \vee \\ \theta_{mxy} = \frac{\text{ATAN}\left(\frac{I_x - I_y}{2 \cdot I_{xy}}\right)}{2} - \frac{\pi}{2} \vee \theta_{mxy} = \frac{\text{ATAN}\left(\frac{I_x - I_y}{2 \cdot I_{xy}}\right)}{2} + \frac{\pi}{2} \vee \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \theta_{mx} = - \frac{\text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)}{2} \\ \theta_{my} = - \frac{\text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)}{2} \\ \theta_{mxy} = \frac{\text{ATAN}\left(\frac{I_x - I_y}{2 \cdot I_{xy}}\right)}{2} \end{array} \right]$$

Las diferencias entre los ángulos para inercias máximas y mínimas es:

$$\#16: \left[\begin{array}{l} \left(- \frac{\text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)}{2} - \frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)}{2} \right) \left(- \frac{\text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \\ \left(- \frac{\text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)}{2} - \frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)}{2} \right) \left(- \frac{\text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \\ \left(\frac{\text{ATAN}\left(\frac{I_x - I_y}{2 \cdot I_{xy}}\right)}{2} - \frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{\text{ATAN}\left(\frac{I_x - I_y}{2 \cdot I_{xy}}\right)}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{\text{ATAN}\left(\frac{I_x - I_y}{2 \cdot I_{xy}}\right)}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \\ \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)}{2} \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)}{2} \right) - \left(\frac{\text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \\ \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)}{2} \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)}{2} \right) - \left(\frac{\text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \\ \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\text{ATAN}\left(\frac{I_x - I_y}{2 \cdot I_{xy}}\right)}{2} \right) - \left(\frac{\text{ATAN}\left(\frac{I_x - I_y}{2 \cdot I_{xy}}\right)}{2} + \frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{\text{ATAN}\left(\frac{I_x - I_y}{2 \cdot I_{xy}}\right)}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \end{array} \right]$$

Cada giro de $\pi/2$ se repiten los ciclos.

#17:

$$\begin{bmatrix} -\pi & -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ -\pi & -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ -\pi & -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

Se puede usar en las expresiones 20:

$$\begin{aligned} \#18: \quad & \left[\begin{aligned} 2 \cdot \theta_{mx} &= -\operatorname{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right) - \pi \vee 2 \cdot \theta_{mx} = \pi - \operatorname{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right) \vee 2 \cdot \theta_{mx} = - \\ 2 \cdot \theta_{my} &= -\operatorname{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right) - \pi \vee 2 \cdot \theta_{my} = \pi - \operatorname{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right) \vee 2 \cdot \theta_{my} = - \\ 2 \cdot \theta_{mxy} &= \operatorname{ATAN}\left(\frac{I_x - I_y}{2 \cdot I_{xy}}\right) - \pi \vee 2 \cdot \theta_{mxy} = \operatorname{ATAN}\left(\frac{I_x - I_y}{2 \cdot I_{xy}}\right) + \frac{\pi}{2} \vee 2 \cdot \theta_{mxy} = \\ & \left[\begin{aligned} &\operatorname{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right) \\ &\operatorname{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right) \\ &\operatorname{ATAN}\left(\frac{I_x - I_y}{2 \cdot I_{xy}}\right) \end{aligned} \right] \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Se puede usar TAN(20) en las expresiones:

$$\begin{aligned} \#19: \quad & \left[\begin{aligned} \operatorname{TAN}(2 \cdot \theta_{mx}) &= \operatorname{TAN}\left(-\operatorname{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right) - \pi\right) \\ \operatorname{TAN}(2 \cdot \theta_{my}) &= \operatorname{TAN}\left(-\operatorname{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right) - \pi\right) \\ \operatorname{TAN}(2 \cdot \theta_{mxy}) &= \operatorname{TAN}\left(\operatorname{ATAN}\left(\frac{I_x - I_y}{2 \cdot I_{xy}}\right) - \pi\right) \vee \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \vee \text{TAN}(2 \cdot \theta_{mx}) = \text{TAN}\left(\pi - \text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)\right) \vee \text{TAN}(2 \cdot \theta_{mx}) = \text{TAN}\left(-\text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)\right) \\ \vee \text{TAN}(2 \cdot \theta_{my}) = \text{TAN}\left(\pi - \text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)\right) \vee \text{TAN}(2 \cdot \theta_{my}) = \text{TAN}\left(-\text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right)\right) \\ \text{TAN}(2 \cdot \theta_{mxy}) = \text{TAN}\left(\text{ATAN}\left(\frac{I_x - I_y}{2 \cdot I_{xy}}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \vee \text{TAN}(2 \cdot \theta_{mxy}) = \text{TAN}\left(\text{ATAN}\left(\frac{I_x - I_y}{2 \cdot I_{xy}}\right)\right) \end{array} \right]$$

$$\#20: \left[\begin{array}{l} \text{TAN}(2 \cdot \theta_{mx}) = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x} \\ \text{TAN}(2 \cdot \theta_{my}) = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x} \\ \text{TAN}(2 \cdot \theta_{mxy}) = \frac{I_x - I_y}{2 \cdot I_{xy}} \vee \text{TAN}(2 \cdot \theta_{mxy}) = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x} \end{array} \right]$$

La diferencia entre los dos ángulos θ_{mxy} para el producto de inercia máximo es:

$$\#21: \text{ATAN}\left(\frac{I_x - I_y}{2 \cdot I_{xy}}\right) - \text{ATAN}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}\right)$$

$$\#22: \frac{\pi}{2} \cdot \text{SIGN}(I_{xy} \cdot (I_x - I_y))$$

El signo es positivo o negativo, es decir a la derecha o izquierda se cumple el ciclo, entonces ángulo θ para ciclo del producto de inercia es:

$$\#23: \pi$$

Se puede usar la TAN en término de SIN y COS:

$$\#24: \left[\begin{array}{l} \text{SIN}(2 \cdot \theta_{mx}) = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x} \cdot \text{COS}(2 \cdot \theta_{mx}) \quad \text{COS}(2 \cdot \theta_{mx}) = \frac{I_y - I_x}{2 \cdot I_{xy}} \cdot \text{SIN}(2 \cdot \theta_{mx}) \\ \text{SIN}(2 \cdot \theta_{my}) = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x} \cdot \text{COS}(2 \cdot \theta_{my}) \quad \text{COS}(2 \cdot \theta_{my}) = \frac{I_y - I_x}{2 \cdot I_{xy}} \cdot \text{SIN}(2 \cdot \theta_{my}) \\ \text{SIN}(2 \cdot \theta_{mxy}) = \frac{I_x - I_y}{2 \cdot I_{xy}} \cdot \text{COS}(2 \cdot \theta_{mxy}) \quad \text{COS}(2 \cdot \theta_{mxy}) = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y} \cdot \text{SIN}(2 \cdot \theta_{mxy}) \end{array} \right]$$

Calcular el ángulo para inercias máximas respecto a los ejes rotados x' e y' es el mismo si lo hacemos a partir de la Inercia rotada en x' o y' ; así mismo, el ángulo θ para inercias rotadas máximas no entrega automáticamente cual es la inercia máxima y cual es la inercia mínima.

Reemplazamos el ángulo θ para inercias máximas y mínimas en las expresiones de la

inercia:

$$\#25: \left[\begin{aligned} I_{xp} &= \frac{1 + \cos(2 \cdot \theta_{mx})}{2} \cdot I_x - \left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x} \cdot \cos(2 \cdot \theta_{mx}) \right) \cdot I_{xy} + \frac{1 - \cos(2 \cdot \theta_{mx})}{2} \cdot I_y \\ I_{yp} &= \frac{1 + \cos(2 \cdot \theta_{my})}{2} \cdot I_y + \sin(2 \cdot \theta_{my}) \cdot I_{xy} + \frac{1 - \cos(2 \cdot \theta_{my})}{2} \cdot I_x \\ I_{xyp} &= (1 + \cos(2 \cdot \theta_{mxy})) \cdot I_{xy} + \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \theta_{mxy}) \cdot (I_x - I_y) - I_{xy} \end{aligned} \right]$$

$$\#26: \left[\begin{aligned} I_{xp} &= - \frac{\sqrt{(I_x^2 - 2 \cdot I_x \cdot I_y + 4 \cdot I_{xy}^2 + I_y^2)} \cdot \text{SIGN}(I_x - I_y) - I_x - I_y}{2} \\ I_{yp} &= \frac{\sqrt{(I_x^2 - 2 \cdot I_x \cdot I_y + 4 \cdot I_{xy}^2 + I_y^2)} \cdot \text{SIGN}(I_x - I_y) + I_x + I_y}{2} \\ I_{xyp} &= - \frac{\sqrt{(I_x^2 - 2 \cdot I_x \cdot I_y + 4 \cdot I_{xy}^2 + I_y^2)} \cdot \text{SIGN}(I_{xy})}{2} \end{aligned} \right]$$

El $\text{SIGN}(I_x - I_y)$ o signo de la diferencia será positivo o negativo:

$$\#27: \left[\begin{aligned} I_{xp} &= - \frac{\sqrt{(I_x^2 - 2 \cdot I_x \cdot I_y + 4 \cdot I_{xy}^2 + I_y^2)} \cdot 1 - I_x - I_y}{2} \\ I_{yp} &= \frac{\sqrt{(I_x^2 - 2 \cdot I_x \cdot I_y + 4 \cdot I_{xy}^2 + I_y^2)} \cdot 1 + I_x + I_y}{2} \\ I_{xyp} &= - \frac{\sqrt{(I_x^2 - 2 \cdot I_x \cdot I_y + 4 \cdot I_{xy}^2 + I_y^2)} \cdot 1}{2} \end{aligned} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} I_{xp} = - \frac{\sqrt{(I_x^2 - 2 \cdot I_x \cdot I_y + 4 \cdot I_{xy}^2 + I_y^2) \cdot (-1) - I_x - I_y}}{2} \\ I_{yp} = \frac{\sqrt{(I_x^2 - 2 \cdot I_x \cdot I_y + 4 \cdot I_{xy}^2 + I_y^2) \cdot (-1) + I_x + I_y}}{2} \\ I_{xyp} = - \frac{\sqrt{(I_x^2 - 2 \cdot I_x \cdot I_y + 4 \cdot I_{xy}^2 + I_y^2) \cdot (-1)}}{2} \end{array} \right]$$

$$\#28: \left[\begin{array}{l} I_{xp} = - \sqrt{\left(\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2 \right)} + \frac{I_x + I_y}{2} \\ I_{yp} = \sqrt{\left(\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2 \right)} + \frac{I_x + I_y}{2} \\ I_{xyp} = - \sqrt{\left(\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2 \right)} \\ I_{xp} = \sqrt{\left(\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2 \right)} + \frac{I_x + I_y}{2} \\ I_{yp} = - \sqrt{\left(\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2 \right)} + \frac{I_x + I_y}{2} \\ I_{xyp} = \sqrt{\left(\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2 \right)} \end{array} \right]$$

Dada la similitud de las expresiones entre I_x' , I_y' y $I_{x'y}'$, se puede usar $I_{max/min}$ en general, así:

$$\#29: \left[\begin{array}{l} I_{MaxMin} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2 \right)} \\ I_{xypMaxMin} = \pm \sqrt{\left(\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2 \right)} \end{array} \right]$$